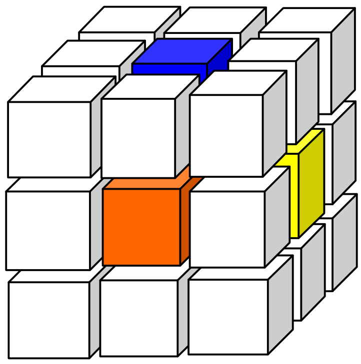


「ルービックキューブ６面完成法」

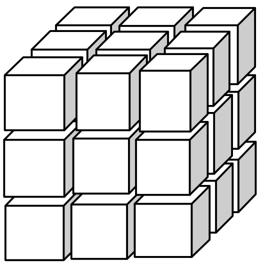
Permutation group(置換群)の応用

兵庫県立神戸高等学校　花房　潔

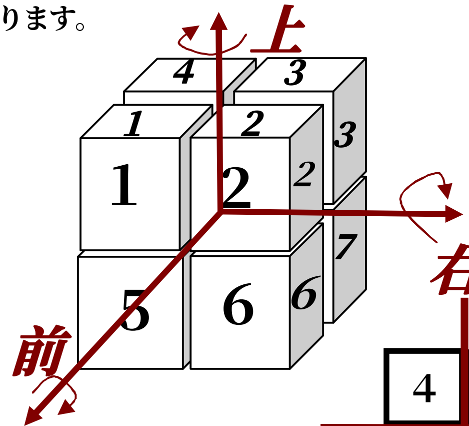
平成１６年２月２７日

はじめに

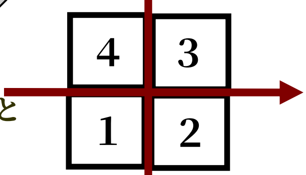
　ルービックキューブの完成法については、色々な流儀があるようです。しかし、一般的にそれはとても難しくてほとんどの人は１度は試みたものの自分にはできないと諦めているのが現状です。これから、紹介する方法は如何に早く揃えるかということは考えていません。理論的に、どうすれば揃えることが可能なのか、その理屈・理論を紹介します。そして、何度か試行錯誤して完成したその感動は生涯忘れることができない筈です。数学的思考のすばらしさを是非体験して下さい。



１． 隅の８つのコマを向きを無視して１から８までの番号を下図のように付けます。図は中のコマを無視してあります。



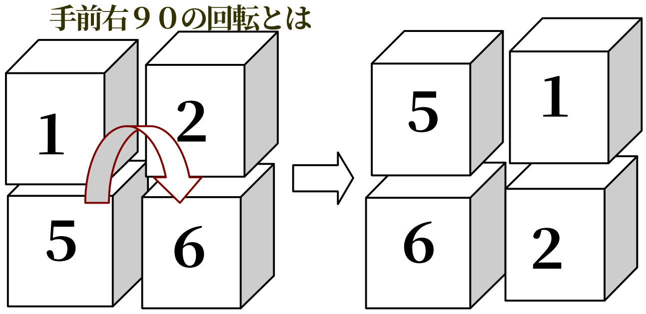
これを上から見た略図を描くと



となります。

２． ここで、次の３つの基本動作を定義付けます。

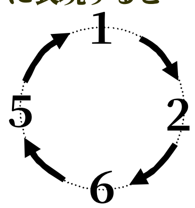
　１）手前右９０度の回転　２）右側右９０度の回転
　３）上面右９０度の回転
　　手前右９０の回転とは



とすることで、これを

$$\textbf{前}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

と置換（permutation）で表現します。
これは　１が２の、２が６の、６が５の　５が１の　位置に変わり　他のコマは不変ということです。
もっと、簡単に表現すると



というのが　前　という操作に対応します。数学で用いる巡回置換（cyclic permutation）の記号を用いると

前＝（１２６５）

となります。ここに表われていないものは不変ということです。同様に考えて

右＝（２３７６）　上＝（１４３２）

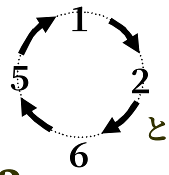
と右、上　の操作を定義します。
それぞれが右９０度方向の回転を意味し、その逆の回転を　前$^{-1}$、右$^{-1}$、上$^{-1}$　で示すと

前$^{-1}$＝（５６２１）　右$^{-1}$＝（６７３２）
上$^{-1}$＝（２３４１） 　となります。

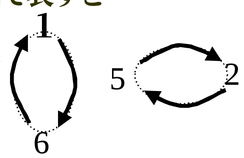
また、それぞれ　右１８０度の回転は　前^{2}、右^{2}、上^{2} で表現され

前^{2}＝（１２６５）（１２６５）＝（１６）（２５）
右^{2}＝（２３７６）（２３７６）＝（２７）（３６）
上^{2}＝（１４３２）（１４３２）＝（１３）（４２）

つまり　例えば　前を２回行えば
（１６）[１と６の互換]　と　（２５）[２と５の互換]をしたことになるわけです。図で表すと



を２回行なえば



となるわけです

３． さて、前、右、上の操作をつづけて行なうとコマがどの様に移動するか計算しましょう。

前右上＝（１２６５）（２３７６）（１４３２）
　　　　　前　　　　右　　　　上

の計算方法ですが、１は前により２に、２は右により３に　３は上により２に　つまり１は前右上により２に変換されます。　　　１　→　２
次に２は前により６に　６は右により２に　２は上により１に　つまり　２は前右上により１に変換されます。
２　→　１
つまり　前右上で１は２に、２は１に移るのですこれを（１２）という互換(transposition)の記号で示します。

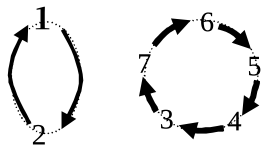
同様に　6は前右上で5に　5は4に　　4は3に
3は7に　7は6に　移ることも計算できます。
これを巡回置換（６５４３７）で表します。
結局　前右上の１回の操作でコマが(１２)(６５４３７)と換わるわけでこれを

前右上＝（１２６５）（２３７６）（１４３２）
前　　　　右　　　　上
＝（１２）（６５４３７）

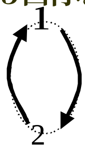
とかけます。（注意　交換はできない　前右上≠右前上）

４． ここで前右上という操作を５回行なうとどうなるでしょう。$(\text{前右上})^5$ を計算します。

$$(\text{前右上})^5 = \{(1\,2\,6\,5)(2\,3\,7\,6)(1\,4\,3\,2)\}^5$$
$$= \{(1\,2)(6\,5\,4\,3\,7)\}^5$$

＝ 

を５回行なうことです

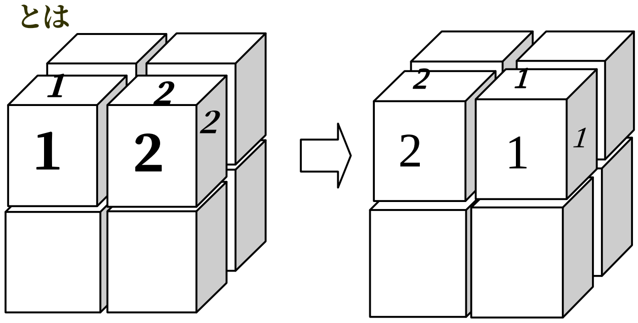
＝ 

だけ残り

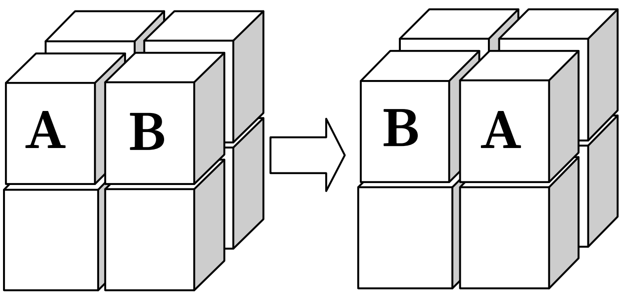
＝（１２）　となります。
つまり　$(\text{前右上})^5 = (1\,2)$　です。

$$\boxed{(\text{前右上})^5 = (1\,2)}$$

とは



（前右上）を５回行なうことは、手前の１と２のコマのみが向きは別として入れ替わり**他のコマは向きは別として不変とする操作**ということです。別の表現をすれば



ＡとＢのコマのみを入れ替えるには（前右上）^{5}で出来るということです。この操作を順次繰り返すことによって方向はどうあれ８つの隅のコマはそろうわけです。
（例　　８５１６４７２３　は隣り合った２つの数の入れ替え・互換の繰り返しで１２３４５６７８と並べ替えることが可能である）

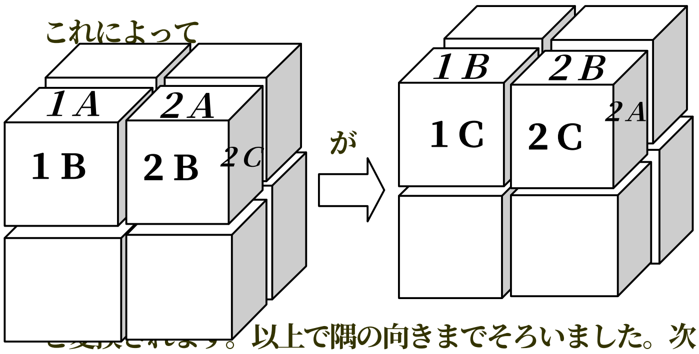
つまり、本質は　他のコマは変えずに特定のこまをのみ動かす操作を置換の考えで計算して求めればよいのです。そして、その組み合わせによってうまくいくわけです。

５． 次に隅の向きを変更するための操作法を求めます。
（方向を無視した）操作で恒等置換とするものを求めればよろしい。

$$(\text{前上}^{-1})^3\ (\text{前}^{-1}\text{上})^3 =$$
$$\{(1\,2\,6\,5)(1\,4\,3\,2)^{-1}\}^3\ \{(1\,2\,6\,5)^{-1}(1\,4\,3\,2)\}^3$$
$$= \{(1\,2\,6\,5)(2\,3\,4\,1)\}^3\ \{(5\,6\,2\,1)(1\,4\,3\,2)\}^3$$
$$= \{(1\,3\,4)(2\,6\,5)\}^3\ \{(5\,6\,1)(2\,4\,3)\}^3$$
$$= I \quad (\text{恒等置換}) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

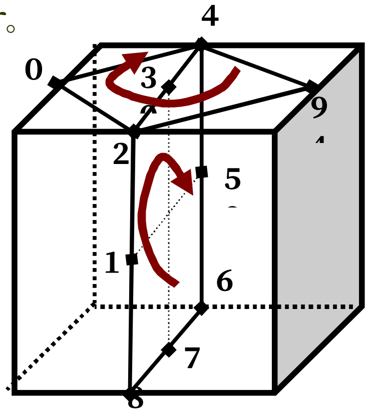
$$\boxed{(\text{前上}^{-1})^3\ (\text{前}^{-1}\text{上})^3 = I\ (\text{恒等置換})}$$

これによって



に変換されます。以上で隅の向きまでそろいました。次の操作に移りましょう。

６． 今度は隅のコマを不変のままで中をそろえる操作を求めることになります。新たにコマに次のような番号を付けます。



そして　いま、基本となる操作として
　上＝（０４９２）　なる巡回置換
　中＝（１３５７）（２４６８）なる巡回置換
を定義します。

7. "中"の変換により８隅は不変ですが,"上"の変換により８隅は移動しますので,"中"の色をそろえる変換は"上"を４回か８回一般に４の倍数回入れないといけないことがわかります。

$中上^{2}中^{-1}上^{2}$

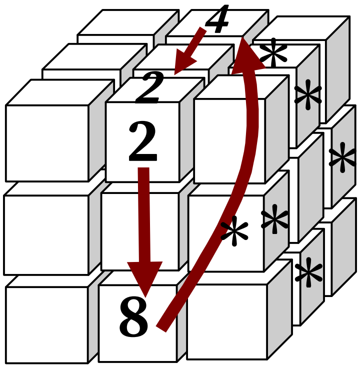
$= (1357)(2468)(0492)^{2}\ (7531)(8642)(0492)^{2}$

$= \overbrace{(1357)(2468)}^{中}\overbrace{(09)(42)}^{上^{2}}\overbrace{(7531)(8642)}^{中^{-1}}\overbrace{(09)(42)}^{上^{2}}$

$= (284)$　つまり

$\boxed{中上^{2}中^{-1}上^{2} = (284)\ 2,8,4の巡回置換}$

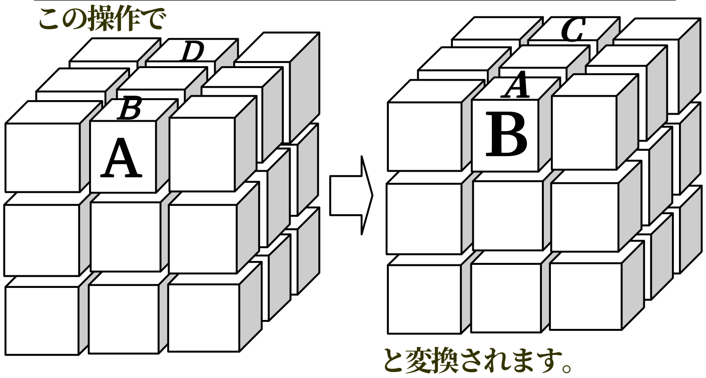
に相当するわけです。これによって、中のコマを向きは別としてそろえていけます。中の移動したい３コマがこの標準の位置にないときは、この位置までコマを持ってきてこの巡回置換を行い、その後　元に戻します。＊を右と下の操作で８の位置に持ってくるなど工夫が必要となります。新操作を発見して下さい。



8. いよいよ最後に中のコマの向きをそろえます。そのための恒等置換を求めます。

$\boxed{(中上)^{2}中上^{2}\ (中^{-1}上)^{2}中^{-1}上^{2} = 恒等置換}$

この操作で



と変換されます。

9.以上まとめると

①　**隅をそろえる操作** $(前右上)^{5} = (12)$ ②　**隅の向きを変える操作** $(前上^{-1})^{3}\ (前^{-1}上)^{3} = I$ ③　**中をそろえる操作** $中上^{2}中^{-1}上^{2} = (284)$ ④　**中の向きを変える操作** $(中上)^{2}中上^{2}\ (中^{-1}上)^{2}中^{-1}上^{2} = I$

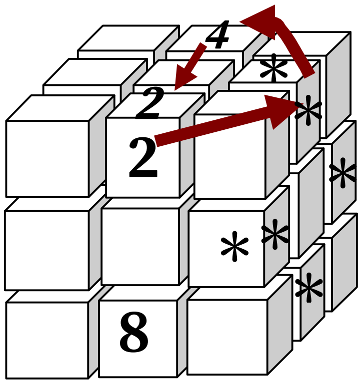
この４つの基本操作がルービック解決公式です。

中を揃える操作の補完

$中上^{2}中^{-1}上^{2} = (284)$

なる変換を **T** として

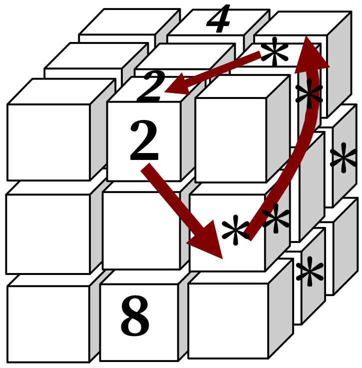
例１



右右下で＊を８の位置まで持ってきて **T** で変換後元に戻せばよいので

$\boxed{右右下\ (T)\ 下^{-1}右^{-1}右^{-1}}$

例２



一つの＊をまず４の位置に、あと一つの＊を８の位置に持ってきてから操作 **T** で変換後元に戻します

$\boxed{右奥^{-1}\ (右右下)\ (T)\ (下^{-1}右^{-1}右^{-1})\ 奥右^{-1}}$

など中の３つのコマの入れ替えは、３つのコマを同じ列にまでまず持ってきてから、操作 **T** を行い変換後、元の位置に戻すようにします。

本書の一部または全部の無断複写・複製を禁じます。
平成１６年２月　著作権者