コーシーが確立した無限和の世界

漸化式

↓ ①漸化式を解く　　②a_nを求めずに極限を話題に　　③a_nの変化の様子を話題に

$a_n \to \lim_{n\to\infty} a_n$　　$\neq 0$　　$= 0$

↓ ⇑ *[等式変形と不等式変形]*　　⇓　　⇓

$S_n \to \lim_{n\to\infty} S_n$　　発散　　不明

カルダーノ 1501　虚数

デカルト 1596　デカルト座標　関数

ニュートン 1642　微積分の基本定理
ライプニッツ 1646 微積分
テイラー1685　テイラー展開
マクローリン 1698　ﾏｸﾛｰﾘﾝ展開

オイラー1707　$e^{\pi i}+1=0$
コーシー　**級数**
フーリエ 1768 フーリエ級数

ガウス 1777　ガウス平面

リーマン 1826

カントール　超限集合論
デデキント
ポアンカレ 1854

[Def]級数：数列$\{a_n\}$に対して順序を変えたり括弧を付けたりしないで初項から順にたしたもの

有限級数$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$　と　無限級数$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$がある

$\boxed{\text{例}}$　１－１＋１－１＋・・・　を勝手に（）をつけて　（１＋１＋・・）－（１＋１＋・・）
（１－１）＋（１－１）＋・・・、１＋（－１+１）＋（－１＋１）＋・・・として考えたら混乱

◇　有限級数を部分和という。$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

◇　無限級数を単に級数ということが多い。$S_\infty=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

◇　あのライプニッツとオイラーの間違い　いずれも有限確定値でないものをS,Tとしたから

$1-1+1-1+\cdots=?$　$1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)$　$S=1-S$　$\therefore S=\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{誤}}$（ライプニッツ）

$\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots=?\ \because xT=T$　$\because T=0$ $\boxed{\text{誤}}$(オイラー)

$$\begin{array}{ccc} \text{数列} & & \\ \downarrow & & \\ a_n & \to & \lim_{n\to\infty}a_n \\ \downarrow & & \\ S_n & \to & \lim_{n\to\infty}S_n \end{array}$$

◇ コーシーは$\lim_{n\to\infty}S_n$で無限級数を定義した。[Start][重要]

混乱に終止符

無限級数の定義　形式$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $a_1+a_2+a_3+\cdots$　を$\{a_n\}$の無限級数といい、

その収束･発散を　***部分和の極限***　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$　で判定すると Cauchy (コーシー) は定義した。

収束するとき, 極限である和を$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$　（極限記号）で表す。

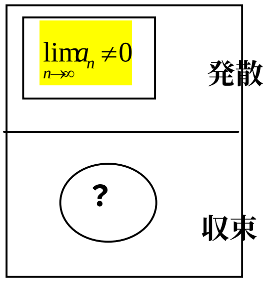
つまり部分和の極限が存在するとき級数は収束すると定義しその値を$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$　と書くことにした。

[混乱のもと] 記号$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$　はｉ）形式的級数　ii）収束する場合のその和　の2通りの意味に使い分けられる。

[あのね] 「コーシって中国の人？」　　　（それは「孔子」Cauchy はフランス人）

◇ *一般的に成り立つ公式*

・「$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は発散」“ $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$は発散判定の十分条件 ”



[大学] $\lim_{m,n\to\infty}|s_n-s_m|=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ：収束（必要十分条件・コーシー）

・$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\alpha$、$\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\beta$と<u>有限確定値</u>に級数が収束するときは

$$\sum_{k=1}^{\infty}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{\infty}a_k+q\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$
（p,qはnに無関係な定数）

[注意] $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\times b_k)\times\!\!\!=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\times\sum_{k=1}^{\infty}b_k$　と　$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}\times\!\!\!=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}a_k}{\sum_{k=1}^{\infty}b_k}$　は収束するときも成り立たない。

有限和も同様に和差は成立するが　積商は成立しない。$\sum$　で書かれるとひっかかる

$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\times\!\!\!=\sum_{k=1}^{n}k\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\frac{1}{2}n(n+1)\frac{1-x^n}{1-x}$　（誤）　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\times\!\!\!=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k(k+1)}$　（誤）

◇ 具体的な数列の無限級数　定義より部分和 S_n を求め $\lim_{n\to\infty} S_n$ を判定する

①**無限等差級数**　$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots$　は明らかで

$d>0$ のとき $+\infty$, $d<0$ のとき $-\infty$　に発散で話題にされない

②**無限等比級数**　$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$　の結果は公式に

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1)\\ \lim_{n\to\infty}na & (r=1)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & \text{if } a=0\vee -1<r<1\\ \text{発散} & \text{上記以外のとき}\end{cases}$$

[超重要公式]無限等比級数　$a=0$ または $-1<r<1$ のとき収束し、その和 $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$

[誤] $S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$　①,　$rS=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots$　②

①−②より　$(1-r)S=a$　$\therefore S=\dfrac{a}{1-r}$　とするのは　間違い　定義に反する

③**無限（等差*等比）型級数**　$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$　は重要

■準備はさみうち論法でよく使われる不等式（二項定理を利用してはさみうちへ）二項不等式

$h>0$ のとき　$(1+h)^n={}_nC_0+{}_nC_1h+{}_nC_2h^2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+{}_nC_nh^n\geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$

■ $\lim_{n\to\infty}nx^n$ の問題,（等差×等比）型の極限[重要]　n の指数（難）＞ n の2次式（易）

$-1<x<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}nx^n=0$　（$\infty\cdot 0$ の不定形で0に収束）

[証明]（ア）$x=0$ のとき　明らか

（イ）$0<|x|<1$　のとき　$|x|=\dfrac{1}{1+h}$　$(h>0)$ とおける

$$0<n|x|^n=\frac{n}{(1+h)^n}\leq\frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

[類似・比較]

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$

$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$,$(x>0)$

$2^n>{}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2$

等差×等比型数列の無限和→“ S_n-rS_n ”を作る　超重要[☆☆☆]

$$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$-)\ xS_n=\quad 1x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

$$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n\quad(x\neq 1)$$

$$\therefore S_n=\begin{cases}\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x} & (x\neq 1)\\ \dfrac{1}{2}n(n+1) & (x=1)\end{cases}\underset{n\to\infty}{\to}\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & (-1<x<1)\text{ のとき}\\ \text{発散} & (\quad\text{以外}\quad)\end{cases}$$

超重要等差×等比型の和は
S_n-rS_n より

戦場･犯人逮捕･囲碁将棋しばしば使われる作戦行動の1つ･はさみ討ちの妙技　はさみうち論法は最重要テーマ（テストに良く出る）　片側が定数の場合は、ハサミウチ論法というよりは極限の定義である

□（誤）$S=1+2x+3x^2+\cdots$

$$-)\ xS=\quad 1x+2x^2+3x^3+\cdots$$

$$(1-x)S=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}\quad(-1<x<1)\qquad\therefore S=\frac{1}{(1-x)^2}$$

[級数の定義に従ってないので誤]

[級数の定義は部分和の極限]

④**無限分数級数** $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ は定義から

「・・・・・」は危険！

（誤） $S_\infty=(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}})+\cancel{\cdots}=1$ は間違い，定義に従っていないから

（正） $S_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$ （正解）

（部分和の極限で）

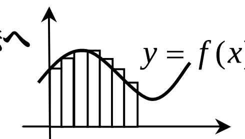
⑤**無限整式列級数** $1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots$ $\alpha\in N$ は明らか

明らかに　無限大に発散

⑥**一般調和級数** $1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots$ 部分和のハサミウチ　積分

$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha})$ ←部分和の極限

の収束・発散は，部分和 S_n を階段図形の面積と見てはさみうち論法へ



$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx<1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^\alpha}<1+\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx$$

↑これはリーマン和ではない　　**区分求積**　リーマン和の極限

以下省略するが　[知ッ得]　実は $\alpha>1$ のとき収束，$\alpha\leq 1$ のとき発散である

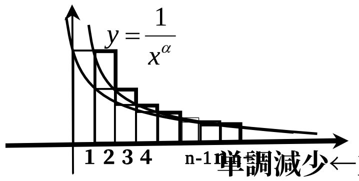
対比

特に $\alpha=1$ のとき　**調和級数**

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore\quad \log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

ゆえに $\log(n+1)\to\infty$ より $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots$ は $+\infty$



単調減少←重要

［コツ］階段をずらすか関数をずらす

少しずつ小さくなる数を無限に加えるとは？　階段をすべり台で挟む　**階段図形**

無限級数の発散判定条件（収束判定条件は一般にはない．等比にはあるが）

① “$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束 $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$” は真

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\alpha$ と存在するから

証 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\alpha-\alpha=0$

② よってこの対偶も正しい “$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散” は真

これが発散の判定に使える発散判定条件

［覚え方］　級数の収束・発散検査はまずスクリーニングを実施

③ 逆は必ずしも真ならず “$\lim_{n\to\infty}a_n=0\to\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束” は成り立たない

反例 **調和級数** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots$ 一般項は0に収束するが，この級数は $+\infty$ に発散する[証明も重要]

④[大学] $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束（絶対収束）$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束　　絶対収束と条件収束がある

◇無限級数の収束・発散の判定手順

（手順1） まず$\boxed{\text{等比か調べる}}$ 等比ならば公式で なければ手順2へ

（ア）初項＝0 または −1＜公比＜1のとき収束し 和は$\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}$ （イ）以外は発散

⇩

（手順2） 一般項の極限$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \text{を調べる}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ なら発散 ←発散判定の十分条件

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ なら収束か発散か判らないから手順3へ

⇩

（手順3） 定義に従う$\boxed{\text{部分和} S_n \text{を求め} \lim_{n\to\infty} S_n \text{を調べる}}$ 無限和を無限和として決して考えないこと.

あくまで部分和の極限として定義されている（コーシーの定義）.等比のみ公式で例外と思え

⇩

（手順4） 部分和が求められないものは求めないで $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n \text{を調べる}}$

階段図形 ， ハサミウチ論法 ， 積分数列では積分不等式利用

高校では まず級数があってその収束･発散を論ずるだけであるが さらにこれらは関数の展開公式 逆に、級数でもって新しい関数を定義してしまうこと（特殊関数）に発展する。

■級数のテーマ

（A）まず級数があり,収束するか発散するかの判定

①$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots$ 調和級数

②$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots$ 一般調和級数,

③$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$ メルカトール級数

④$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ ライプニッツ級数

（B）級数の形に定数や関数を表す

○テーラー展開 ○マクローリン展開 $\boxed{\text{いろいろな関数を整関数で表す}}$

① $e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ $\underline{(-\infty < x < \infty)}$

② $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$ $\underline{(-\infty < x < \infty)}$

③ $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$ $\underline{(-\infty < x < \infty)}$

④ $\log(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$ $(-1 < x \leq 1)$

⑤ $(1+x)^\alpha = {}_\alpha C_0 + {}_\alpha C_1 x + {}_\alpha C_2 x^2 + {}_\alpha C_3 x^3 + \cdots$ $(-1 < x < 1)$

⑥ $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ $(-1 < x < 1)$ 無限等比級数の和

この①②③の式のxを複素数まで拡張して，複素関数を定義すると

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **が得られ$\theta = \pi$を代入して$e^{\pi i}+1=0$ 「人類の至宝」を得る**

○定数の級数による表現

① $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

② $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

③ $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

④ $1 = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$

○フーリエ展開

関数のフーリエ級数表示 **整関数を三角関数で表す**

① $f(x) = x \quad (-\pi \le x \le \pi)$

$$x = 2\{\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin nx + \cdots\} \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

② $f(x) = |x| \quad (-\pi \le x \le \pi)$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\{\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{n^2}\cos nx + \cdots\} \quad (-\pi \le x \le \pi, n \text{は奇数})$$

○特殊関数