[花プリ] ***極限で定義される　　級数･微分･積分*** ***の学問が解析学***

$\dfrac{d}{dx}$ という1つの記号に秘められた偉大なる思考の飛躍を味わい、数学が無限に対して何ができるかを理解すること、これが微積分を理解することである。そしてこの数学が提供できる最良のことだけは、できるだけ多くの人の財産になって欲しい。これは無限というひょっとしたら世にある最大の謎に対する、おそらく現在最良の解答であり、人類の貴重な文化遺産である.

■定義＜数列の極限＞ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ **または** “$n\to\infty$ **のとき** $a_n \to \alpha$”

⇔ n が限りなく大きくなるとき, a_n は限りなく α に近づく

（**高校：限りなく近づく論法**　とでもいっておこう）

⇔ $\forall\varepsilon;\exists N[n \ge N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon]$　（**大学**：$\varepsilon-\delta$ **論法という**）（ユプシロンーデルタ）

＜関数の極限＞ $\lim_{x\to a} f(x)=b$ **または** “$x\to a$ **のとき** $f(x)\to b$”

⇔ x が a と異なる値を取りながら限りなく a に近づくとき,
$f(x)$ は限りなく b に近づく　（**高校：限りなく近づく論法**　とでもいっておこう）

⇔ $\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0[0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon]$　（**大学**：$\varepsilon-\delta$ **論法という**）

- $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$
  $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\infty$
  の定義は略
- 極限は必ずしも存在するとは限らない。存在する場合には唯一である

- lim 易が収束するときその極限値で極限記号 $\boxed{\text{新}}$ を定義　その後は公式で $\boxed{\text{新}}$ が一人歩きする。
- **極限で定義されたものは収束しないと意味がない。収束条件は何か。通常極限計算は公式で行う。**
- **高校では　「限りなく近づく論法」**
- 数学記号→の読み方[いろいろ]　① $\overrightarrow{AB}$　「ベクトル」
  ② "$p\to q$"　「ならば例外なく」 ,　"$p\to q$" $\Leftrightarrow P\subset Q$
  ③ $x\to a$　「限りなく近づく」 ,　“$x\to a$“ $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0;\exists\delta>0[0<|x-a|<\delta]$[大学]
  [あのね] “山頂→”⇔「山頂あっち」 、“トイレ↑”⇔「トイレこの先」

◆微分の定義

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するときその極限を $f'(x)$ と書く←**平均変化率の極限**　*傾き*

$\boxed{\text{例}}$ 定義により $f(x)=\cos x$ を微分せよ。

$\boxed{\text{例}}$ $\lim_{h\to0}\dfrac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h} \overset{byDef}{=} f'(x)=2\cos 2x$

$$\text{微分} \overset{def}{=} \lim(\text{平均変化率})$$

◆連続の定義

$f(x)$ が $x=a$ で連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つ, a **への極限**で定義　*繋がっている*

$\boxed{\text{例}}$　$x=a$ を境界とする関数のこの点における連続性･微分可能性の判定問題

$\boxed{\text{注意}}$　$f(x)$ が連続のとき, $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty} a_n)$　　lim と f は無条件には交換できない

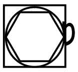
$f(x)$ が連続のとき, $\lim_{x\to\alpha} f(g(x))=f(\lim_{x\to\alpha} g(x))$

[なるほど]霊界用語（天国、地獄）があるように、極限用語があるんだ（微分　積分　連続　級数　e　π）

■ π の定義

$\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\text{正n角形の周の長さ}}{\text{直径}}$ ＝3.1415‥収束するこの極限値を円周率といい π と書く

← **円周の長さは正多角形の周の極限で。**



$3<\pi<4$　　**[類　東大]**

◆■ e の定義

$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は2.71828‥に収束する。この極限値を e と書く. $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$

1よりごくごくわずかに大きい値を、なんべんも, なんべんも限りなく掛け合わせたらどういう値になるか　（ ）の中が1に近づく勢いと、1/hが大きくなる勢いとが**絶妙のバランスを保って、１にもならず無限大にもならず‥‥一定値に近づく！**

$$\lim_{h\to0}(1-h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{-h\to0}(1+(-h))^{\frac{1}{-h}(-1)} = \lim_{p\to0}(1+p)^{\frac{1}{p}(-1)} = \lim_{p\to0}\frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{e}$$

■ 無限級数の定義

形式$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$を無限級数といいその収束·発散を

<u>部分和の極限</u>$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$で判定するとコーシーは定義した。

$$\text{無限級数} \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}(\text{部分和})$$

収束するとき，極限である和も$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ で表す。

·[注意]　記号$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は i）形式的級数　ii）収束する場合のその和　の2通りの意味に使い分けられるのが混乱のもと。

·　級数の話題は収束するか発散するかの判定　と　級数の形に定数や関数を表す(テイラー展開など)こと　の2つがある

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \qquad , \qquad e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

■ 積分の定義

$\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k$ なる<u>リーマン和の極限</u>が存在するとき，

$$\text{積分} \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}(\text{リーマン和})$$

その極限値を定積分と定義し$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ で表す。

◇ **f を閉区間$[a,b]$で定義された有界な関数とする。$[a,b]$を有限個の区間に分割し、**

その分点を $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ とする。

こうしてできた小区間$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，··，$[x_{n-1}, x_n]$からそれぞれ任意に$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$をとり

和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$　（リーマン和　という）　をつくる。

分点の数を増し，小区間の幅$x_k - x_{k-1}$の最大値$\displaystyle\max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$を 0 に収束させるとき，

分点の増し方によらずこの和が<u>一定の値に収束するとき（∗）</u> f は$[a,b]$上で積分可能であるといい，

その一定の値を f の$[a,b]$上での定積分といい，記号では$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$とかく。

（∗）連続であることが十分条件　　証明は[大学]

[あのね]「微分のことは微分でせよ。積分も微分でせよ。」

◇ $f(x)$が$[a,b]$で連続なら存在し，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \text{（微積分学の基本定理）}$$

$$\int_a^b f(x)dx \overset{th.}{=} G(b)-G(a),\quad G' = f \quad \text{（微積分学の基本公式）}$$

と，この極限値が微分（原始関数）で求まることをニュートン、ライプニッツが発見した。

◇[Def.]閉区間$[a,b]$で関数のリーマン和の極限が有限確定値として存在するとき

積分可能といい、その値を定積分と定義しその極限記号を$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$とかく。

◇[Th.]［微積分学の基本定理］さらにこの値が原始関数で求められることを発見した（ニュートン）

◇[Th.]閉区間$[a,b]$で<u>連続</u>な関数に対しこの極限は存在するつまり積分可能である

◇[Th.]特に $f(x)$ が[0,1]で連続のとき、$\Delta x_k = \dfrac{1}{n}, c_k = \dfrac{k}{n}$ としたリーマン和は収束

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot + f\left(\frac{n}{n}\right)\right\} = \int_0^1 f(x)dx$$

区分求積法は「リーマン和の極限」の1つの形　よって　積分の定義そのもの

$\boxed{\text{例}}$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}\pi + \frac{3}{n}\sin\frac{3}{n}\pi + \frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\pi\right\} \overset{by\ def}{=} \int_0^1 x\sin\pi x dx$$

∵左辺は閉区間$[0,1]$で連続な関数 $f(x) = x\sin\pi x$ のリーマン和の極限より　積分の定義そのものでその値は<u>微積分学の基本定理</u>により微分の逆で求められる。

◇ ・[発見] 連続性・微分・e は関数の極限で定義し、級数・積分・π は数列の極限で定義している。

・[高校の教科書] 微分の逆で不定積分を定義 さらに 定積分もそれから定義する. この定義の基で いろいろな積分の性質、微積分学の基本定理が成り立つ。だから,区分求積法や面積へのつながりが不自然となり,教科書の発展に入れているというブサイクなことになっている。

・関数f(x)の[a,b]における「関数f(x)の[a,b]が微分、リーマン和の極限が積分」いずれも存在するとは限らない。関数f(x)が[a,b]で連続の時は、積分は可能である。微分は可能とは限らない。

・本来、微分と積分はまったく違う極限で定義されたもの。それが繋がったのが微積分の基本定理。

積分が微分の逆の操作だったとは

◇ **区分求積法** ① ②

$$\boxed{\text{リーマン和}}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{\int_a^b f(x)dx} = G(b)-G(a),\quad G'=f$$

(幅内の値の関数値) *幅 の和の形 を見抜き積分へ

特別なケースとして $f(x)$ が[0,1]で連続のとき、$\Delta x_k = \dfrac{1}{n}, c_k = \dfrac{k}{n}$ としたリーマン和も収束

$$\boxed{\text{リーマン和}}\frac{1}{n}\left\{ f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \boxed{\int_0^1 f(x)dx} = G(1)-G(0)$$

①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{ f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right\} = \int_0^1 f(x)dx$$

区分求積法は「リーマン和の極限」の1つの形よって 積分の定義そのもの

$\boxed{\text{例}}$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}\pi + \frac{3}{n}\sin\frac{3}{n}\pi + \frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\pi\right\} \overset{by\ def}{=} \int_0^1 x\sin\pi x dx$$

◇ **面積、体積、曲線の長さ** 次の<u>連続関数</u>のいろいろなリーマン和の極限も積分の定義そのものでそれらが面積、体積、曲線の長さであると定義する。

$$f\ge 0\ ;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k,\quad S\ge 0;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} S(c_k)\Delta x_k,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\Delta x_k$$

つまり，面積 $S=\int_a^v f(x)dx$，体積 $V=\int_a^b S(x)dx$，曲線の長さ $L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

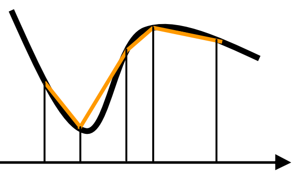
◇ **lim で定義されるいろいろなものの１つに→リーマン和の極限で定義される積分があり→その特別なものに区分求積法、面積、体積、曲線の長さがある。**

■定義 曲線の長さ 図の折れ線部分の長さ

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}^2}$$

$f(x)$ が $[a,b]$ で微分可能のとき、平均値の定理より

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{f'(c_k)(x_{k+1}-x_k)\}^2}$$



$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\,(x_{k+1}-x_k)$$

$g(c_k)=\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}$ ，$\Delta_k = x_{k+1}-x_k$ とおくと

$=\sum_{k=0}^{n-1} g(c_k)\Delta x_k$ この和は $f'(x)$ が連続（$f:C^1$ 級関数という）のとき、$g(x)=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ は連続関数でそのリーマン和であるから

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\,(x_{k+1}-x_k)\quad (\text{ただし、}\delta=\max(x_{n+1}-x_n))$$

は収束し，積分の定義から $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$ である。

これで （$f:C^1$ 級関数に対し）曲線の長さと定義する。

微分にしろ積分にしろ根底にある考え方は無限小の量をてこにして様々な問題を解くという態度である。

■置換積分の公式

タイプ１　C^1級関数 $g(x)=t$ のとき，$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$

$$\int y\frac{dt}{dx}dx=\int ydt \quad f(\Delta)\Delta'\text{型} \qquad \cdot\cdot①$$

タイプ２　$x=g(t)$：C^1級関数のとき，$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$

$$\int ydx=\int y\frac{dx}{dt}dt \qquad \cdot\cdot②$$

例　タイプ１　$f(\Delta)\Delta'$型

例　タイプ２　置換積分の公式 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta$ 難→易 の形での応用

① $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ は $x=a\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ または $x=a\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$

② $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$，$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ は $x=a\tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$

・ $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C=\theta+C\ (x=\sin\theta)$ 、$\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x=\theta+C\ (x=\tan\theta)$

・ [大学]逆三角関数を用いて，

$\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}+C\ (a>0)$ 、 $\int\dfrac{1}{a^2+x^2}dx=\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+C\ (a\neq 0)$

■部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$\int fg'=fg-\int f'g \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot③$$

たまに $\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$

$$\int fg=fG-\int f'G$$

と書かれることも
①、②、③とも右辺が易のとき意味がある。

[秘伝][③の形にする裏業]
指数→ 三角 → 整関数 → 対数 の順

指数･対数 と 微分･積分
の理論展開の類似性

○[前提] 真数･底の条件 ， 連続性

○[逆] $a^{\log_a x}=x$，$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

○[裏の公式]
※対数の公式の裏は，指数の公式から
$\log X+\log Y=\log XY$
※積分の公式の裏は，微分の公式から
置換積分は，合成関数の微分から

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

部分積分は，積の微分から

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

実際の利用は 易 に帰着させる方向に

■関数列の極限 と 関数列の級数

定義 関数列$\{f_n\}$が f に各点収束するとは?．一様収束するとは?
入試では関数列は、特別な予備知識を前提とせず、帰納的に定義して考えるレベルの問題