[花プリ]

交点ベクトル問題　超重要[☆☆☆☆☆]

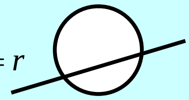
（1）交点ベクトル問題とは

問題文中の“交点 P ”に関わるベクトル（$\overrightarrow{AP}$， $\overrightarrow{OP}$ など）を求める問題のこと

面積比／体積比（高さが等しいとき底辺比／底面積比）が問われる．

[新傾向]円と直線，球と直線の交点ベクトル問題が新しい

$|\overrightarrow{OP}-\vec{c}|=r$



（2）パターン分類

①分線との交点　②垂線との交点　③垂直２等分線との交点

④角の２等分線との交点　⑤空間平面との交点　⑥円との交点

（3）基底とするベクトルを定める　その１次独立性が背景にある

[Def.] [定義] $\vec{a},\vec{b}$ が１次独立 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない

[性質] $\vec{a},\vec{b}$ が１次独立のとき $k\vec{a}+l\vec{b}=k'\vec{a}+l'\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}k=k'\\ l=l'\end{cases}$

一次独立性は，同一直線上にない，平行でない，　同一平面上にない，など否定的に定義される

[Def.] [定義] $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が１次独立 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{c}\neq\vec{0},\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は始点を揃えて同一平　面上にない

[性質] $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が１次独立のとき $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=k'\vec{a}+l'\vec{b}+m'\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}k=k'\\ l=l'\\ m=m'\end{cases}$

（4）手法

$\overrightarrow{OP}=$

$\overrightarrow{OP}=$

超重要　交点を作る２つの図形（直線・平面，円）のそれぞれに沿って２通りに表す

と２通りに表す．または， $\vec{p}$ の条件を立てる

（5）基本となる公式

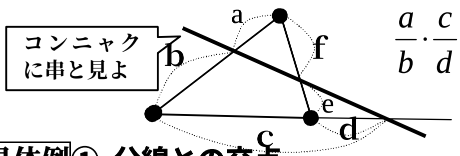
分点　$\vec{p}=\dfrac{\text{タスキがけ}}{\text{比の和}}$　の形

直線上の点　$\vec{p}=(1-t)\vec{\mathrm{O}}+t\vec{\Delta}$　の形　または　$\vec{p}=\vec{\mathrm{O}}+t\vec{\Delta}$ の形

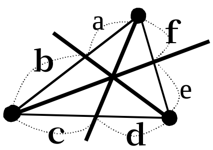
平面上の点　$\vec{p}=l\vec{\mathrm{O}}+m\vec{\Delta}+n\vec{\nabla}$　$(l+m+n=1)$　の形

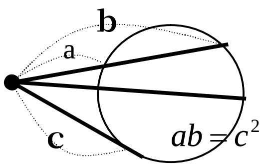
（6）別解として　メネラウスの定理　チェバの定理　を利用することも

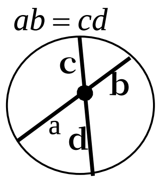
[Th.]メネラウスの定理　チェバの定理　方べきの定理



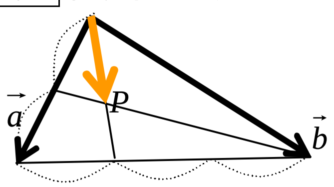
$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{e}{f}=1$







具体例① 分線との交点



$\overrightarrow{OP}=s\left(\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right)$　　$\overrightarrow{OP}=\vec{b}+t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$

ゆえに　$\dfrac{2}{3}s\vec{a}+\dfrac{1}{3}s\vec{b}=\dfrac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a},\vec{b}$ は１次独立より

$\begin{cases}\dfrac{2}{3}s=\dfrac{1}{2}t\\ \dfrac{1}{3}s=1-t\end{cases}$　よって，$\begin{cases}s=\dfrac{3}{5}\\ t=\dfrac{4}{5}\end{cases}$　ゆえに $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

別解 メネラウスの定理より

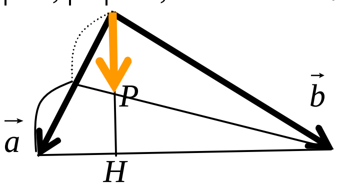
$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{e}{f}=1$　$e:f=2:3$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right)=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

さらに $\Delta OAP:\Delta ABP:\Delta OBP$ の面積比まで問われることもある

② 垂線との交点

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ とする



$$\overrightarrow{OP}=\vec{b}+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$$

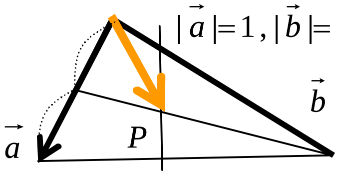
$$\overrightarrow{OP}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

ゆえに $\left\{\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$$-\frac{1}{2}t|\vec{a}|^2+\left(\frac{3}{2}t-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ より $-\frac{1}{2}t+\left(\frac{3}{2}t-1\right)(-1)+(1-t)4=0\quad \therefore t=\frac{5}{6}$ ゆえに $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{12}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

③ 垂直二等分線との交点



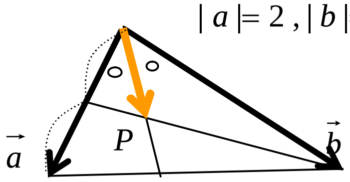
$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ とする $\qquad \overrightarrow{OP}=\vec{b}+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$

$$\left(\overrightarrow{OP}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

以下②と同様にして $\qquad t=\frac{5}{9}$ ゆえに $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

④ 角の２等分線との交点

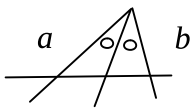
$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$ とする



$$\overrightarrow{OP}=s\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right)=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

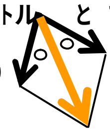
$$\overrightarrow{OP}=\vec{b}+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$$

角の2等分線といえば，1)対辺を $a:b$ の比に分ける[超重要] $\quad$ ゆえに $\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$



$\vec{a},\vec{b}$ は１次独立より

2) 同じ向きの単位ベクトル と ひし形 (神戸大)

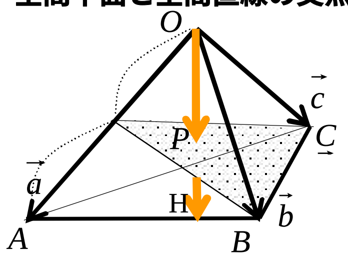


$\overrightarrow{OP}=s\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right)$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}t\\ \frac{1}{3}s=1-t\end{cases}\quad \text{よって，}\quad \begin{cases}s=\frac{3}{4}\\ t=\frac{3}{4}\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

$\boxed{\text{別解}}$メネラウスの定理より $\frac{1}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{e}{f}=1\quad e:f=3:5$ $\quad$ ゆえに $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{8}\left(\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right)=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

⑤ 空間平面と空間直線の交点



垂線の足 H は平面 ABC 上の点より $\quad \overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

$\overrightarrow{OH}\perp ABC$ より $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

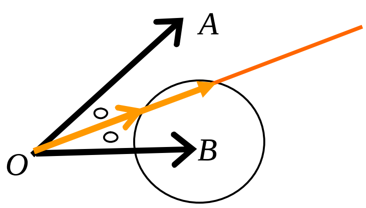
$\overrightarrow{OP}\perp ABC$

これより $\overrightarrow{OH}$ を求める

次に $\quad \overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OP}=l\frac{1}{2}\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}\quad l+m+n=1\quad$ より $\overrightarrow{OP}$ を求める

⑥ 円 と 角の２等分線 の交点 (京大)



$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$ する， B を中心半径 $r=1$ の円の交点 P

$\overrightarrow{OP}=s\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right)$ または $(=t(2\vec{a}+3\vec{b}))$， $|\overrightarrow{OP}-\vec{b}|=r$ より

漸化式のパターン分類

(ぜんかしき)

[注意] $\{a_k\}(k=1,2,\cdots)$
$\{a_{n-1}\}(n=2,3,\cdots)$ はどちらも同じ
$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$ を意味する

① $\boxed{a_{n+1} = f(a_n)\ 型}$ ←$\alpha = f(\alpha)$ 平衡値(へいこうち) α は引く
バランスバリュー

（d, r, p, q, r, s は n と無関係とする）

漸化式が与えられたらどうするの？
ｉ）a_n を求めることができるものは求める～オ
求=2 められないものは
ii）極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ をはさみうちで求めるなどキ
a_n の振る舞いを探る（不動点・周期点）カ

ア $a_{n+1} = a_n + d$ 等差型 ←$a_n = a + (n-1)d$

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

$a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = -2 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

イ $a_{n+1} = ra_n$ 等比型 ←$a_n = ar^{n-1}$

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

$a_1 = 1,\ 3a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

ウ $a_{n+1} = pa_n + q$ （$p \neq 1$）型←平衡値を引く

基本必須(複素数列でも)
$\alpha = p\alpha + q$ 　*文字係数で出る*
$\alpha = \dfrac{q}{1-p}$ として（$p \neq 1$）
$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ に変形
$\{a_n - \alpha\}$ は公比 p の数列
$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$
$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$

基本 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 3 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1 + a_n$ ←ハノイの塔 $a_n = 2^n - 1$

エ $a_{n+1} = \dfrac{ra_n}{pa_n + q}$ ←逆数をとるとウに帰着

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 2} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

逆数をとると
$a_{n+1} = pa_n + q$ 型に帰着

$a_{n+1} = f(a_n)$ 型の $f(x)$ は実に様々な形で出題される。
[コツ]図(くもの巣)で $a_1, a_2, \cdots$ をイメージし捉える事

オ $a_{n+1} = \dfrac{ra_n + s}{pa_n + q}$ ←平衡値を引く，２つ利用

$\dfrac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = k\dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ の形に

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

カ $a_{n+1} = ka_n(1 - a_n)$ ←平衡値は引く，

ロジスチック関数，不動点
１周期点，２周期点

$a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

キ $a_{n+1} = \sqrt{pa_n + q}$ ←平衡値は引く

図をかく，平衡値は引く
極限は　はさみうち論法
不等式 $|a_{n+1} - \alpha| \leq k|a_n - \alpha|$
（$0 < k < 1$）を利用
$0 < |a_n - \alpha| \leq k^{n-1}|a_1 - \alpha|$

基本 $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

② $\boxed{a_{n+1} = a_n + f(n)\ 型}$ 階差型数列←長靴の和

階差の長ぐつ，階比の長ぐつ
$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots$
$f(1), f(2), f(3), \cdots\cdots, f(n-1), f(n),$

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3^n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

$a_{n+1} = f(n)a_n$ 階比型数列 ←長靴の積

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = n^2 a_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

③ $\boxed{a_{n+1} = pa_n + f(n)\ 型}$ 超重要 ←$f(n)$ 消去

ア $f(n) = pn + q$ のとき ←引く

$a_{n+1} - \{p(n+1) + q\}$
$= 2\{a_n - (pn + q)\}$

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3n + 1 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

イ $f(n) = q^n$ のとき ←割る

$f(n)$ 消去を考える方法
１次は引く，指数は割る

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

④ $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 隣接３項間型

基本

[重要] $x^2=px+q$ の根（特性根）を利用

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

（ア）$\alpha\neq\beta$ の時（イ）$\alpha=\beta$ の時

ア $p+q=1$

$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

イ $p+q\neq1$ [関連]黄金比

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ←フィボナッチ数列

全兎＝成兎 ＋子兎

⑤ S_n と a_n を含む漸化式

超重要

$\{a_n\}$のみまたは$\{S_n\}$のみの漸化式へ

$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$

$n=1$を代入する$a_1=S_1$からa_1を求める

S_nは$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$や$\sum_{k=1}^{n}a_k$のときも

$S_n=3n-2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=3n-2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

⑥ 積型漸化式 ←対数をとる

積型は対数をとる（対数の底は適当なものにする）

$a_1=10$，$a_{n+1}=(a_n)^3$ $(n=1,2,3,\cdots)$

⑦ 連立漸化式

1 等比型に帰着する
$\{\alpha a_n+\beta b_n\}$が等比となるように
2 $\{b_n\}$を消去④などに帰着
3 行列の n 乗問題に

ア $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$型 $\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$

$\begin{cases}a_1=2\\ b_1=6\end{cases}$，$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+b_n\\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

[暗記]和と差を作る
$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$
が等比数列となる

特にイ $\begin{pmatrix}p & q\\ q & p\end{pmatrix}$型（京大）$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=qa_n+pb_n\end{cases}$

$\begin{cases}a_1=1\\ b_1=2\end{cases}$，$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+3b_n\\ b_{n+1}=3a_n+2b_n\end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

[頻出重要]予想 $\forall n\in N$; a_nに関する命題を証明は数学的帰納法で
Ⅰ a_1 a_2 については成り立つ
Ⅱ漸化式に応じた帰納法の原理で証明する
漸化式は前提条件として利用

基本

⑧ 帰納的方法 一般項を予想，数学的帰納法で証明する問題

$a_1=-1$ $a_{n+1}=a_n^{\,2}+2na_n-2$ $(n=1,2,3,\cdots)$

⑨ 融合型 例（奇数項と偶数項を２つの漸化式で定義するなど）

$a_1=-1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n:\text{偶数})\\ a_n+3 & (a_n:\text{奇数})\end{cases}$，$\begin{cases}n:\text{奇数のとき}\ a_{n+1}=a_n+2\\ n:\text{偶数のとき}\ a_{n+1}=3a_n\end{cases}$

定積分で定義された数列の問題もある
例 $I_n=\int_1^e(\log x)^n\,dx$
$\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めるため・漸化式を作り利用する・積分不等式で挟む・はさみうちの原理を用いるなど 総合問題となる。

⑩ 非隣接項間の漸化式 隣接項ではない項間の関係が与えられる

$a_1=1,a_2=2,\ a_{n+2}=a_n+1$ $(n=1,2,3,\cdots)$

⑪ 複素漸化式[旧課程][コツ]計算より複素数平面上でイメージする.

$z_{n+1}=z_n+\beta$（平行移動），$z_{n+1}=\alpha z_n$（原点中心の回転と拡大）

$z_{n+1}=\alpha z_n+\beta$
など重要（平衡値）
回転と拡大の点列に
（スパイラル点列）

⑫ 行列漸化式 交換法則が成り立たないことに注意しながら手法をまねる.

$A_{n+1}=PA_n+Q$ は $C=PC+Q$ なる C を用い $A_{n+1}-C=P(A_n-C)=\cdots=P^{n-1}(A-C)$

⑬ 不等式もある 漸化式は ①解く問題 ②解かずに利用する問題 とがある

⑭ 漸化式を作る問題 ① 場合の数漸化式「ハノイの塔」「フィボナッチ数列」・・・・・
② 確率漸化式 ③行列の n 乗問題 ④積分漸化式

◆ベクトル方程式　A, B, X は２次の正方行列，p,q, a,b,c,d,x,y は実数として，

① $A\vec{x}=\vec{b}$, $A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ を解け←一般の２直線

連立１次方程式は⇔ ２直線の位置関係で図形的に⇔行列で表現すればどうなるかを考えよ

解（ア）交わる　（イ）一致　（ウ）平行

（ア）$\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$, A^{-1} があるとき $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$（イ）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{p}{q}$ のとき無数（ウ）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d} \neq \dfrac{p}{q}$ のとき解なし

② $A\vec{x}=\vec{0}$, $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ を解け←原点を通る２直線

解（ア）交わる　（イ）一致　平行：このケースはない

（ア）$\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$ (A^{-1} がある)とき $\vec{x}=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$　（イ）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$（$A^{-1}$ が存在しない）のとき無数

（重要公式）$A\vec{x}=\vec{0}$ が $\vec{x}=\vec{0}$ 以外の解をもつ⇔ $\Delta(A)=ad-bc=0$（必要十分条件）

③ $A\vec{x}=k\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0} \Leftrightarrow (A-kE)\vec{x}=\vec{0}, \vec{x} \neq \vec{0}$（固有値と固有ベクトル）

$A\vec{x}=k\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=kx \cdots ① \\ cx+dy=ky \cdots ② \end{cases}$ $(x,y) \neq (0,0) \Leftrightarrow$

$(A-kE)\vec{x}=\vec{0}, \vec{x} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-k)x+by=0 \cdots ① \\ cx+(d-k)y=0 \cdots ② \end{cases}$ $(x,y) \neq (0,0)$

この $\vec{x}$ を A の固有ベクトル，k を A の固有値という

解 $A\vec{x}=k\vec{x}$ は $A\vec{x}-k\vec{x}=\vec{0}$ より $(A-kE)\vec{x}=\vec{0}$

これが，$\vec{x} \neq \vec{0}$ なる解を有する必要十分条件は

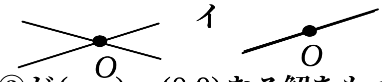
$\Leftrightarrow \Delta(A-kE)=0$ である

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$ の行列式の値 $\Delta=(a-k)(d-k)-bc=0$

$\Leftrightarrow k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$（$A$ の固有方程式という）

①②は原点を通る２直線よりアイのケースのみ

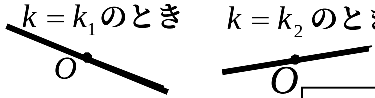
ア　イ



①②が $(x,y) \neq (0,0)$ なる解をもつ

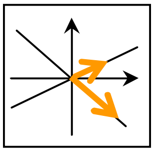
⇔イ⇔①②の傾きが等しい（必要十分条件）

$k=k_1$ のとき　$k=k_2$ のとき



この解 k_1, k_2 を A の固有値という，このとき①②は一致する２直線となるから

固有ベクトルは各々この直線上に原点から到るベクトルの事である



◆行列方程式　A, B, X は２次の正方行列，p,q, a,b,c,d,x,y は実数として，

④ $AX=B$, $AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

（ア）A^{-1} があるとき，$X=A^{-1}B$

（イ）A^{-1} がないとき，・・・・・・・・・

[比較]　$ax=b$

（ア）a^{-1} があるとき　$x=a^{-1}b$

（イ）$a=0$ のとき　$0x=b$

$b=0$ ならすべての実数　$b \neq 0$ なら解なし

⑤ $AX=O$, $AX=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（ア）A^{-1} があるとき，$X=A^{-1}O=O$

（イ）A^{-1} がないとき，・・・・・・・・・

[比較]　$ax=0$

（ア）a^{-1} があるとき　$x=0$

（イ）$a=0$ のとき　$0x=0$　すべての実数

∴「$ax=0$ が $x=0$ 以外の解をもつ⇔ $a=0$」

⑥１次の行列方程式[重要] $pX=qE$

１次の行列方程式 $pX=qE \Leftrightarrow p\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

（ア） $p\neq 0$の時，$X=\dfrac{q}{p}E$ （イ） $p=0$の時，$0X=qE$ より
$q=0$の時任意　$q\neq 0$の時なし

⑦２次以上の行列方程式[重要]変な積の定義の世界の方程式

→ケーリー・ハミルトンの次数下げ定理で１次の行列方程式に帰着

$$X^2=O,\ X^2=E,\ X^2=X,\ X^2+X-2E=O,\ X^3=E$$

例 $A^2=E$ なる２×２型実行列を求めよ． 当然すべて求めよ

方針 $\begin{cases} A^2=E \\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2=E \\ A^2=(a+d)A-(ad-bc)E \end{cases} \Rightarrow (a+d)A-(ad-bc)E=E$

十分性の確認をする

解 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくならば $A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$

ケーリー・ハミルトンの次数下げ定理より

$A^2=E \Leftrightarrow (a+d)A-(ad-bc)E=E$ （実は必要十分）

$\therefore (a+d)A=(ad-bc+1)E$ ←１次の行列方程式に帰着（⇐ 必要条件）

（ア）$a+d\neq 0$のときは　$A=\dfrac{ad-bc+1}{a+d}E=kE$ の形

このとき $A^2=E$ に代入して $k^2E=E$　$\therefore k=\pm 1$　$\therefore A=\pm E$

十分性のチェック

（イ）$a+d=0$のときは　$0A=(ad-bc+1)E$　$\therefore ad-bc+1=0$

このとき，$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$ に代入すると $A^2=E$ を得る

十分性のチェック

故に $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ すべて

（ア）（イ）合わせて，

解は無限にあるんだ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=E$ の解である 終

[２つの間違い] （誤）$A^2=E$ から $(A+E)(A-E)=O$　$\therefore A=-E,E$

（誤）$A^2=E$ から $A^2+0A-1E=O$　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

と比較して $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ すべて

[修正]（ア）$A=kE$ のとき，代入し　（イ）$A\neq kE$ のとき，係数比較する

別解 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ からは，計算は大変だ！

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 & ① \\ (a+d)b=0 & ② \\ (a+d)c=0 & ③ \\ bc+d^2=1 & ④ \end{cases}$

②③から（ア）$a+d\neq 0$のとき②③から $b=0, c=0$

さらに①④から $a=\pm 1, d=\pm 1$（複号同順）

（イ）$a+d=0$のとき②③は満たされ，

①④から $ad-bc=-1$

（ア）（イ）から $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

[関連]行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対し

①トレース tr＝7, $\Delta=10$

② $A^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，正則変換

③ケーリー・ハミルトンの Th.

$A^2-7A+10E=O$

④固有方程式

$k^2-7k+10=0$

⑤固有値 2,5 固有ベクトル

$t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$t\neq 0$，$s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$s\neq 0$

⑥対角化行列 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

対角化 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

[比較]数方程式 $\begin{cases} x^2=1 \\ x>0 \end{cases}$

$X^2=E$ の方が方程式らしいが

$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

（イ）は　$A=\begin{pmatrix} t & b \\ c & -t \end{pmatrix}$

$bc=1-t^2$

[係数比較には要注意]

$A\neq kE$ のときは

$pA+qE=p'A+q'E$

$\Leftrightarrow p=p' \wedge q=q'$

[コツ]行列の計算は次数を下げすべてを成分とせずに丸ごと部分を有効に活用せよ（ケーリーとハミルトンより）

行列の計算
① A,B,C の顔で→変形に限界が
②すべて成分で→計算が大変
③ミックスで→CH 定理で１次に
ここからなら考えやすい

困ったことだ　行列方程式を満たす行列をすべて求めなさいと問わずにそのものの $a+d$ と $ad-bc$ を求めよと聞いてくることが多い

例 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=E$ をみたすとき

$a+d$ と $ad-bc$ の値を求めよなら，解をまず求めてから（$a+d$，$ad-bc$）＝(2,1),(-2,1),(0,-1)

１次変換のパターン分類

逆なし，１対１でない
$E \to$ 直線 $(y=3x)$
直線→直線 $(y=3x)$
直線→１点 $(p,3p)$

点の像だけで図形の像は範囲外？だが

逆あり
１対１である
$E \to E$
直線→直線

ひせいそく
非正則変換

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ３倍

せいそく
正則変換

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ 型

$y=mx$ 線対称変換も重要
$R(2\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$R(\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}R(-\theta)$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 型

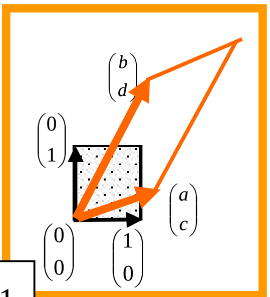
[重要]回転と拡大の合成変換

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E \to \vec{0}$

一般に一次変換で点 (x,y) は
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
の像を基底とするベクトル座標（斜交座標）
に対応する点 (x', y') に移る

類 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 型は連立漸化式（和･差を作る）で



Ⅰ．正則変換

（１）正則変換による直線の像　$l: x+y=1$　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　l'

（２）正則変換による直線の原像　　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　$l': x+y=1$

（３）正則変換による平面全体の像　平面全体 E　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

（４）不動点　P　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　P

（５）$y=mx$ の形の不動直線　$y=mx$　$f:\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　$y=mx$

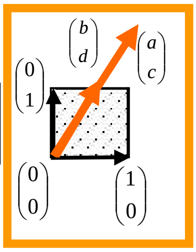
（６）不動直線　l　$f:\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　l

方法①
媒介変数表示利用
方法②
２点の像を求める
方法③
１点と方向ベクトルの像から線型性を利用して

Ⅱ．非正則変換

（７）非正則変換による直線の像　$l: x+y=1$　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

（８）非正則変換による直線の像　$l: x+2y=p$　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$



（９）非正則変換による１点の原像　　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　$(1, 3)$

（１０）非正則変換による平面全体の像　平面全体 E　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

（１１）非正則変換の不動直線　l　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　l

（１２）非正則変換による領域の像　$D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$　$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Ⅲ.変換式の決定

（１３）直線→直線
１次変換の決定

$\boxed{l: x=1}$ $f: \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{l': x+y=1}$

（１４）直線→１点
１次変換の決定

$\boxed{l: x+2y=p}$ $f: \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{原点}\ (0,0)}$

（１５）不動直線
１次変換の決定

$\boxed{l: x+y=0}$ $f: \begin{pmatrix} -1 & a \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\boxed{l: x+y=0}$

Ⅳ.文字を含む１次変換による像

（１６）直線の像 $\boxed{l: x+2y=0}$ $f: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

（１７）直線の像 $\boxed{l: x+3y=3}$ $f: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

（１８）平面全体 E の像 $\boxed{\text{平面全体}E}$ $f: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

Ⅴ.領域・２次曲線の像

（１９） 領域の正則変換による像

$\boxed{D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}}$ $f: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{D'}$

（２０）領域の正則変換による像 $\boxed{2x+3y<6}$ $f: \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

（２１）領域の非正則変換による像

$\boxed{D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}}$ $f: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\boxed{D'}$

（２２）円の非正則変換による像 $\boxed{x^2+y^2=4}$ $f: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

Ⅵ.回転と拡大の合成変換による像

（２３）$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$型１次変換 ＝ 回転と拡大の合成

$\boxed{x^2+y^2=1}$ $f: \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

（２４）$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$型１次変換 ＝ 回転と拡大の合成

$\boxed{(x-1)^2+y^2=1}$ $f: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad}$

Ⅶ $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$型の問題は連立漸化式の和と差のペアーで解く型

（２５） $\boxed{(x_{n+1}, y_{n+1})}$ $f: \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ $\boxed{(x_n, y_n)}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ←和$\{x_n+y_n\}$ 差$\{x_n-y_n\}$ が等比数列になる

行列の性質の問題

例（１）$\boxed{2\text{次の正方行列}A, B\text{に対して，}\quad AB = E \Rightarrow BA = E}$

［ヒント］１．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく，２．［意味］ 右逆元は，左逆元でもあるよって，逆行列の証明は一方だけ示せばよいことになる　３．n 次の正方行列まで一般化できる

(2) **係数比較には要注意**

(誤) A：2次の正方行列 ，$p, q, p', q' \in R$ のとき

$$pA + qE = p'A + q'E \quad \Rightarrow \quad p = p' \ \wedge \ q = q'$$

(正) A：2次の正方行列 $A \neq kE$ ，$p, q, p', q' \in R$ のとき

$$pA + qE = p'A + q'E \quad \Rightarrow \quad p = p' \ \wedge \ q = q'$$

(誤) A：2次の正方行列 $p, q, p', q' \in R$ のとき

$$A^2 + pA + qE = A^2 + p'A + q'E \Rightarrow \quad p = p' \ \wedge \ q = q'$$

行列の演算に商は定義されていない．また，一般に交換法則が成り立たない．よって，逆行列が存在するときは，両辺に右から，左から掛けるという操作で式の変形を行なうこと

[類]ベクトルの係数比較
$\vec{x}, \vec{y}$ が１次独立のとき
$p\vec{x} + q\vec{y} = p'\vec{x} + q'\vec{y} \Leftrightarrow p = p' \wedge q = q'$

(3) ① A^{-1} が存在し，$AB = O \Rightarrow B = O$　② A^{-1} が存在し，$AB = AC \Rightarrow B = C$

③ A^{-1} が存在するとき，$(A^{-1})^{-1} = A$，

④ A^{-1}，B^{-1} が存在するとき，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⑤ $A^2 = E \Rightarrow A^{-1} = A$　⑥ $A^3 = E \Rightarrow A^{-1} = A^2$

⑦ $A + B = AB$ なる B がある $\Rightarrow A - E$ は逆行列をもつ

⑧ A^2 が逆行列をもつ $\Rightarrow A$ は逆行列をもつ

⑨ $A^2 = O \Rightarrow E - A$ は逆行列をもつ

⑩ $A^2 - A + E = O \Rightarrow A$ は逆行列をもち，$A + A^{-1} = E$

⑪ $A^2 = O \Rightarrow A$ は逆行列をもたない

⑫ $AB = O$ かつ $B \neq O \Rightarrow A$ は逆行列をもたない

⑬ $A \neq E$ かつ $A^2 = A \Rightarrow A$ は逆行列をもたない

□の逆行列が◇であることの証明は　□◇＝Ｅを示す

□は逆行列をもつことの証明は
①（　　　）□$= E$ を示す
②２次の正方行列なら $\Delta \neq 0$ を示す

□は逆行列をもたないことの証明は
①（否定的命題は背理法で）
持つと仮定すれば矛盾することをいう．
②２次の正方行列なら $\Delta = 0$ を示す

(4) $\boxed{\begin{array}{l}\text{２次の正方行列において，} \\ A\text{が逆行列をもたない} \Rightarrow A + E\text{，}A - E\text{の少なくとも一方は逆行列をもつ}\end{array}}$

［ヒント］ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいて，行列式の値を評価する

(5)
２次の正方行列において，ある正の整数 $n \geq 2$ について

$$\begin{cases} A^{n-1} \neq O \\ A^n = O \end{cases} \Rightarrow A^2 = O$$

［ヒント］１．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく２．（ア）A^{-1} が存在するとき

（イ）A^{-1} が存在しないとき３．ケーリー・ハミルトンの定理を利用する

$\begin{cases} A^{m-1} \neq O \\ A^m = O \end{cases}$ の時
正方行列 A は指数 m のべき零行列といわれる。
$A^{m-1}\vec{x} \neq \vec{0}$ なる $\vec{x}$ をとれば $\{\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}, \cdots, A^{m-1}\vec{x}\}$ は一次独立である

(6) $\boxed{\text{２次の正方行列において，}A(\neq O)\text{が逆行列をもたない} \Rightarrow A\text{は零因子である}}$

［ヒント］$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく，$A \neq O$，$B \neq O$ であるにも関わらず，$AB = O$ となる B の存在を示す

関数のグラフシート

① $y=xe^{-x}$　② $y=xe^{-2x}$　③ $y=xe^{x}$　④ $y=\dfrac{e^x}{x}$　⑤ $y=\dfrac{\log x}{x}$　⑥ $y=e^{-x}\sin x$

⑦ $y=x+\sin x$　⑧ $y=x+2\sin x$　⑨ $y=e^{-x^2}$　⑩ $y=\log(x^2+1)$　⑪ $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

⑫ $y=\dfrac{x}{x^2+1}$　⑬ $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$　⑭ $y=\dfrac{x^2}{x+1}$　⑮ $y=\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+x-2}$　⑯ $y=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

⑰ $y=x\sqrt{1-x^2}$　⑱ $y=x+\sqrt{1-x^2}$　⑲ $y=\sqrt{x^3+1}$　⑳ $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

（１）定義域・値域・不連続点・偶関数・奇関数・周期関数・和差積商・合成など

（２）y'（$y'=0$ となる実数 x）

（６）y''（$y''=0$ となる実数 x）

（３）増減表・極値

x	
y'	
y	

（７）おうとつ表・変曲点

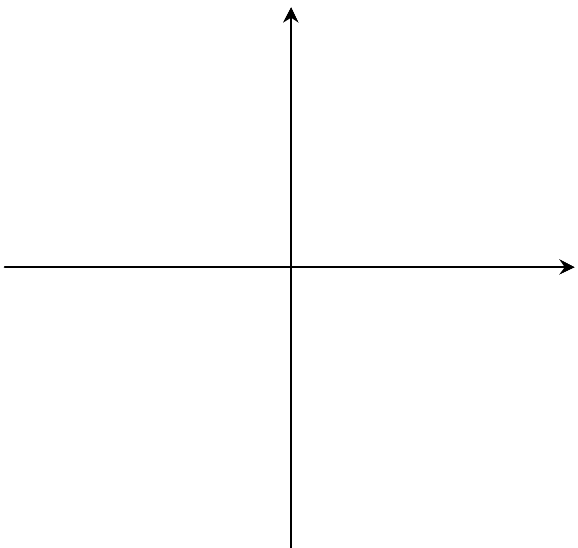
x	
y''	
y	

（４）座標軸との交点

$x=0$ のときの y
$y=0$ のときの x

（８）グラフ

増減表によらず概形をつかむことが大切総合的に完成する事



（５）漸近線

組　　　番氏名

置換積分

置換積分はまとめても理論は難しい．具体例で使えればよしとせよ．

$\varphi(t)$ は C^1 級関数つまり微分可能かつ $\varphi'(t)$ は連続とする

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_a^b f(x)dx \quad \text{ただし } x=\varphi(t),\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$$

難→易　易→難・・・（＊）

証明　$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ のとき，$x=\varphi(t)$ とすると

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right] & x \arrow[r, "F"] & F(x) \end{tikzcd}$$

t	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

$\varphi(\alpha)=a$　$\varphi(\beta)=b$

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{F(x)}{dx}\frac{dx}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \text{ゆえに} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(x)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$ **証明終**

type1 $x=\varphi(t)$，$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$，**type2** $t=\varphi(x)$，$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$

例１　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx=\int_0^1 t^2 dt \quad (t=\sin x)$　は（＊）を難→易の方向に適用．$f(\Delta)\Delta'$ 型は△＝t

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt \quad (x=\sin t)$　は（＊）を易←難の方向に適用．$f(\Delta)\Delta'$ 型に

◆[公式の意味]　$\Delta=$ O と置くことで

$f(\Delta)\Delta'$ 型の積分（難）は $f($O$)$ の積分（易）と等しい

$f($O$)$ の積分（難）で $\Delta=$ O と置くことで $f(\Delta)\Delta'$ 型の積分（易）となるものがある

$$\int f(\Delta)\Delta'=\int f(\mathrm{O})$$

◆ ①　$\int_{-1}^1 x^2 dx$　$(t=x^2)$ とおくと　$x|-1\to1$，$t|\ 1\to1$　$\int_1^1 t\frac{dx}{dt}dt=0$　は $\boxed{\text{誤}}$　正しくは $\frac{2}{3}$，

②　$\int_{-1}^1 xe^{x^2}dx=0$ 正しい　③　$\int_1^2 x^2 dx$　$(t=x^2)$ とおくと　$x|1\to2$，$t|1\to4$　$\int_1^4 t\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=$ は正しい

①　type1　xが $[-1,1]$ のとき $(t=x^2) \Leftrightarrow x=\varphi(t)=\begin{cases}\sqrt{t} & (x\ge0)\\ -\sqrt{t} & (x<0)\end{cases}$ は C^1 級ではない。

区間 $[1,1]$ より関数が不連続であることが積分を成立させない。分割すれば良い

②　type2　$t=\varphi(x)=x^2$ は C^1 級であり　$\int_{-1}^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{x^2}\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\int_1^1 e^t dt=0$

③　type1　$[1,4]$ で $x=\sqrt{t}$ は C^1 級と見なせる

◆**応用**　<u>媒介変数表示された関数と置換積分</u>

[重要] $S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}dt$

と形式的に使えるようにしておく

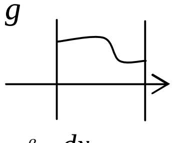
関数 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ に対し，$y=F(x)$ であるとして

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & x \arrow[r, "F"] & y \end{tikzcd}$$

$x=f(t)$ より $\frac{dx}{dt}=f'(t)$ これは形式的に $dx=f'(t)dt$ である

$a=f(\alpha)$　$b=f(\beta)$　，

t	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

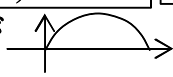


$[a\ \ b]$ で $y\ge0$ のとき　$[a,b]$ で x 軸とで囲まれた部分の面積 S は

$$x=f(t):S=\int_a^b ydx=\int_a^b F(x)dx=\int_\alpha^\beta F(f(t))f'(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt=\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}dt=$$

x の関数としての y　　$F(\Delta)\Delta'$　型だ　　t の関数としての y

例２ $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ $(a>0)$　**サイクロイド**



[コツ] $\frac{dy}{dx}$，$\int dx$ とひとまとめとせずに dx, dy を主役に dx, dy を単体で使えるように心掛ける

$[0,2\pi a]$ において $y=a(1-\cos\theta)\ge0$ であるから面積は

$$S=\int_0^{2\pi a}ydx=\int_0^{2\pi}y\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)d\theta$$

θ の関数としての y つまり $g(\theta)$ のこと

[花プリ]導関数（→方向）と原始関数の公式（→の逆方向）を一緒に

◇定義　$f(x)$：関数　数の集合から数の集合への，どの元にもただ１つ対応する規則

◇定義　関数 $f(x)$ の導関数 $f(x) \to f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$　（関数から新しい関数を定義）

◇定義　関数の定積分　$\lim R(f,\Delta)$ が収束するとき，その極限値を $\int_a^b f(t)dt$ とかく

つまり $\int_a^b f(t)dt \ = \lim_{n,\delta\to\infty,0}$ リーマン和

（が収束するとき）

この値（符号付面積量）を求めること［求積］が最大のテーマ

◆定理　連続関数のリーマン和の極限は収束する。つまり連続関数は積分可能

◇定義　不定積分（積分関数）$\int_a^x f(t)dt$ は x の関数で $F(x)$ とかく。（関数から新しい関数を定義）

定義・性質　$f(x)$ の原始関数[いろいろ][一般論]　（→を微分演算子として）

微分すると関数 $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数といい $G(x)$，$\int f(x)dx$ とかく

$G(x) \ \to \ f(x)$　$G(x)$ は $f(x)$ の原始関数の１つ

$\int f(x)dx \to f(x) \to f'(x) \to f''(x) \to \cdot\cdot \to f^{(n)}(x)$

$f(x)$ のご先祖様　　$f(x)$ の子供

原始関数 $\xrightarrow{ビ} f(x) \xrightarrow{ビ}$ 導関数

←強要される思考の方向　→これまでの思考の方向

①（微分から）見つかれば原始関数「連続関数の原始関数は必ず存在する導関数は存在するとは限らない」

②$[a,x]$ で連続な関数 f のリーマン和の極限（収束する）で定義される不定積分 $\int_a^x f(t)dt$ は

x の関数で f の原始関数の１つである（ニュートン）「微積分の基本定理」

$[a,x]$ での $\lim R(f,\Delta) \quad \to \quad f(x)$

$\int_a^x (x-t)f(t)dt \to \boxed{\int_a^x f(t)dt} \quad \to \quad f(x)$

２回積分という　　$F(x) \quad \to \quad f(x)$

連続関数 $f(x)$ の原始関数の姿いろいろ

③関数 f が連続なら f の原始関数は存在するが，初等関数で表現できないものもある。

そのような定積分で定義される関数を特殊関数（Special　function）という

例　$\int_a^x e^{-x^2}dx \quad (=\int e^{-x^2}dx) \ \to \ e^{-x^2} \ \to \ -2xe^{-x^2}$

連続関数の導関数は存在するとは限らないが原始関数は必ず存在する

④ f が連続でないときは　存在しないこともある。

⑤ f が連続で $f \geq 0$ とするとき $[a,x]$ での面積 $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数である

面積 $S(x)$ $\to$ $f(x)$（現高校流）

同様に 体積 $V(x)$ $\to$ 断面積 $S(x)$ ，曲線の長さ $L(x)$ $\to$ $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$

以上から原始関数の顔はいろいろあることがわかる

閉区間で f が連続のとき　$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx = G(x) + \mathrm{C} \to f(x)$

◆ f が $[a,b]$ で連続のとき定積分 $\int_a^b f(t)dt = G(b)+C = G(b)-G(a)$ [微積分学の基本公式]

微分の一般公式から定積分の計算に使える一般公式を得る

$f+g \to f'+g'$，　$fg \to f'g+fg'$，　$\dfrac{f}{g} \to \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$，　$F(G(x)) \to f(G(x))g(x)$

$F(\Delta) \to f(\Delta)\Delta'$ ，　$\log|f| \to \dfrac{f'}{f}$　部分積分法の公式 $\int (f'g+fg') = fg$ より $\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$

置換積分の公式　$F \to f$，$F(\Delta) \to f(\Delta)\Delta'$ より $\int f(\Delta)\Delta' = F(\Delta) = \int f(\Delta)d\Delta$

★ $\boxed{x=\varphi(t) \quad として \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) = \int f(x)dx}$

■ 「微分の公式」と「積分の公式」（→「微分する」と ←「積分する」）

例 $f(x)$の原始関数→ $f(x)$ → $f(x)$の導関数→ $f(x)$の2階導関数

①微積分の不死鳥 $e^x \to e^x \to e^x \to$

②三角関数[基本] $-\cos x \to \sin x \to \cos x \to -\sin x$

③三角関数[重要] $-\log|\cos x| \to \tan x \to \dfrac{1}{\cos^2 x}$

④三角関数[盲点] $\log|\sin x| \to \dfrac{1}{\tan x} \to -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

⑤整関数[基本] $(ax+b)^\alpha \to \alpha(ax+b)^{\alpha-1}\cdot a$

$\dfrac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}\ (\alpha\neq -1) \to (x-a)^\alpha \to \alpha(x-a)^{\alpha-1} \to \alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}$

$\log|x-a| \to \dfrac{1}{x-a}$ （有理関数） $\to -\dfrac{1}{(x-a)^2}$

⑥対数関数[超重要][暗記] $x\log x - x \to \log x \to \dfrac{1}{x} \to -\dfrac{1}{x^2}\quad (x>0)$

$\log|x| \to \dfrac{1}{x} \to -\dfrac{1}{x^2}\quad (x\neq 0)$

⑦逆三角関数[知ッ得] $\sin^{-1}x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （無理関数）→ 略　　$? \to \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

⑧逆三角関数[知ッ得] $\tan^{-1}x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ （有理関数）→ 略　　$? \to \dfrac{1}{a^2+x^2}$

⑨[知ッ得] $x\geq 0, \log(x+\sqrt{1+x^2}) \to \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \to$ 略

⑩[知ッ得] $x\geq 0, \dfrac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\} \to \sqrt{1+x^2} \to$ 略

⑪双曲線関数[知ッ得] $\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \to \dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \to \dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

「何か三角関数の微積とにているな」 $\sinh x \to \cosh x \to \sinh x \to \cosh x$

［参考］ $\sinh^{-1}x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cosh^{-1}x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

⑫減衰曲線 $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x) \to e^x\sin x \to e^x(\sin x+\cos x)$

$\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x) \to e^x\cos x \to -e^x(\sin x-\cos x)$

⑬最頻出関数 $\dfrac{1}{2}(\log x)^2 \to \dfrac{\log x}{x} \to \dfrac{1-\log x}{x^2}$

⑭最頻出関数 $\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x) \to \sin^2 x \to 2\sin x\cos x$

⑮初等関数では求められない(存在はするが。)

$\int_a^x e^{-x^2}dx \quad (=\int e^{-x^2}dx) \to e^{-x^2} \to -2xe^{-x^2}$

初等関数

$x^2, \sin x, \log x,$

$\int_a^x e^{-x^2}dx \quad (=\int e^{-x^2}dx)$

初等関数のクラスは不定積分に関して自己完結的ではない

他 $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1}{\log x}$, $\sqrt[3]{x(1-x)}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ の不定積分で定義される関数は初等関数ではない

[花プリ９]**積分 Table**　＊は最頻出[ポイント]積分は部分か置換か変形公式かこの３つだけ

$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\sin x$	＊$\sin^2 x$	$\sin^3 x$	$\sin^4 x$	……	$\sin^n x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\cos x$	＊$\cos^2 x$	$\cos^3 x$	$\cos^4 x$	……	$\cos^n x$
$\dfrac{1}{\tan^2 x}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\tan x$	$\tan^2 x$	$\tan^3 x$	$\tan^4 x$	……	$\tan^n x$
$\dfrac{1}{(\log x)^2}$	$\dfrac{1}{\log x}$	＊$\log x$	＊$(\log x)^2$	$(\log x)^3$	$(\log x)^4$	……	$(\log x)^n$

置換積分

$f(\Delta)\Delta'$ 型に

$\Delta = t$ とおく

$f(\sin x)\cos x$ 型

$f(\cos x)\sin x$ 型

$f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 型

$f(\log x)\dfrac{1}{x}$ 型

$f(e^x)e^x$，　$f(e^x)$ 型

＊$\displaystyle\int \Delta^n \Delta' = \frac{1}{n+1}\Delta^{n+1} + C$

＊$\displaystyle\int \frac{\Delta'}{\Delta} = \log|\Delta| + C$

$\sqrt{a^2+x^2}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$　　＊$\dfrac{1}{a^2+x^2}$

＊$\sqrt{a^2-x^2}$　　＊$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　$\dfrac{1}{a^2-x^2}$

[＊は逆三角関数に関連]

分数関数

分子定数型の部分分数に分ける型

$\dfrac{x+2}{x^3(x-1)^2}$

三角関数の積

積→和の形に

$\sin x \sin 2x$

$\sin 2x \cos 3x$

[フーリエ級数に関連]

部分・置換・変形のどれも可

$(x-\alpha)(x-\beta)$

$(x-\alpha)(x-\beta)^2$

$\sqrt{}$ を，$\sqrt{}$ の中を，t とおく

$\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

$x\sqrt{1-x}$

部分積分

＊**異なる関数の積に**

$\displaystyle\int uv' = uv - \int u'v$

[知ッ得]　'　を付けるのは指数→三角→整関数→対数の順

$xe^x = x(e^x)'$

$x\log x = (\frac{1}{2}x^2)'\log x$

$x\sin x = x(-\cos x)'$

絶対値の定積分

$\displaystyle\int_0^{\pi} |t-a|\sin t\,dt$

[知ッ得]　**微分の逆としての不定積分の話題**

＊① $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\}$ のとき $f'(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$\therefore \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\} + C$$

＊② $x \geq 0$, $f(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$ のとき $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \log(x+\sqrt{1+x^2}) + \mathrm{C}$$

③ $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$，$(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$

$\therefore$　$(e^x \sin x + e^x \cos x)' = 2e^x \cos x$，＊$\displaystyle\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

[ポイント]

積分の方法は

「部分」か

「置換」か

「変形公式」か

この３つしかない

[知ッ得]逆三角関数の微分

④ $\sin^{-1} x$　　$\tan^{-1} x$

$\downarrow$　　$\downarrow$

＊$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　＊$\dfrac{1}{1+x^2}$

 面積・体積・曲線の長さの捉え方　定義・公式・覚え方

Ⅰ・区分求積法　リーマン和とその極限で定義

特別な場合として, f が考えている区間[a,b]で連続で、$y=f(x)\geq 0$ (常に正 or 負)なら
リーマン和の収束する極限値を x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の

面積と定義する。このとき面積 $S=\int_a^b f(x)dx$

ある量を区分求積の考え方で表現すると

$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ の連続関数 (x_i-x_{i-1})

$(x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$ とする)

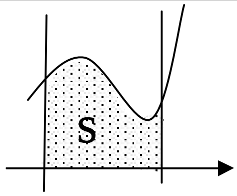
の形になったとするこれは収束して

$=\int_a^b$ 連続関数dx　←定積分の定義

以上のアイデアで分けて集める対象が何であるかによって、
面積だけでなく体積や曲線の長さ,その他の量に適用される。
はじめに，面積、体積、曲線の長さがあるのではなく定義される
量である。これらは極限用語

① $\mathrm{I}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ で $f(x)\geq 0$ が連続のとき、

収束するこの極限を面積と定義する。つまり　**面積 S=** $\int_a^b f(x)dx$



② $\mathrm{I}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ で断面積 $S(x)(\geq 0)$ が連続のとき、

収束するこの極限を体積と定義する。つまり　**体積 V=** $\int_a^b S(x)dx$

③ $\mathrm{I}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}(x_i-x_{i-1})$ で $f'(x)$ が連続のとき、収束するこの極限を

$f(x)$ の曲線の長さと定義する。つまり　**曲線の長さ** s= $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

■定義　曲線の長さ

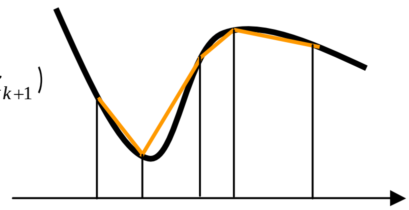
図の折れ線部分の長さ

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}^2}$$

C^1 関数とは　1　次導関数が連続である関数のこと

$f(x)$ **が** $[a,b]$ **で微分可能のとき、平均値の定理より**

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{(x_{k+1}-x_k)f'(c_k)\}^2}\ ,\ (x_k<c_k<x_{k+1})$$



$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}(x_{k+1}-x_k)$$

ここで $g(c_k)=\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}$, $\Delta_k=x_{k+1}-x_k$　**とおくと**

$$=\sum_{k=0}^{n-1}g(c_k)\Delta x_k$$

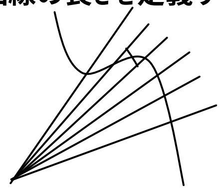
$f'(x)$ **が連続のとき、** $g(x)=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ **は連続より**

この和は連続関数のリーマン和であるから, $\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\to 0}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}(x_{k+1}-x_k)$

は収束し，積分の定義から $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$ **である。これで曲線の長さを定義する。**

④　その他　極方程式での面積・曲線の長さ　や　表面積

$$\sum\frac{1}{2}\{f(c_k)\}^2\Delta\theta_k$$



$\boxed{\text{II}}$ 面積·体積·曲線の長さの公式の理解(暗記)のために $dy, dx, \int$ の圧倒的説得力

積分＝積微分（微細な増分を寄せ集める）　区間$[a,b]$で

$f(x)$ (≥ 0) は連続とする「$\int_a^b f(x)dx$」は「区間$[a,b]$で無限小幅dxの小区間に分割各xにおける無限小幅の短冊の面積 $f(x)dx$ を求めて $x=a$ から $x=b$ までそれらを$\int(=\sum\ )$したもの」

つまり薄い幅に高さを掛けた短冊をaからbまで寄せ集めたものが面積。と区分求積の意味を考えて使うように心掛けるとよい。
これで分かった積もりになればよし

$\int_a^b$ は「aからbまで無限小幅の短冊を寄せ集める」, dx は「無限小の幅」といったイメージで捉える

① $\boxed{ydx,\ xdy}$ の寄せ集めが面積　**面積＝$\int$ 長さ·幅**

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}dt \quad (y \geq 0) \quad (x=f(t):y=g(t))$$

$$S = \int_c^d x\,dy = \int_e^f x\frac{dy}{dx}dx \quad (x \geq 0) \quad (y=f(x):x=g(y))$$

[知ッ得] $\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$ 極形式で微細な面積を $S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$

媒介変数では

$$dx = \frac{dx}{dt}dt, \quad (x \to t)$$

変数変換は

$$dy = \frac{dy}{dx}dx, (y \to x)$$

と形式的に変換したもの

② $\boxed{S(x)dx, \pi y^2 dx\ , \pi x^2 dy}$ の寄せ集めが体積　**体積＝$\int$ 断面積·幅**

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad S(x)\text{ は断面積}$$

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_\alpha^\beta \pi y^2 \frac{dx}{dt}dt$$ ←x 軸の周りの回転体の体積と媒介変数への変換

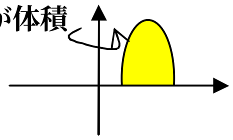
$$V_y = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_c^d \pi x^2 \frac{dy}{dx}dx$$ ←y 軸の周りの回転体の体積と x への変数変換

[知ッ得] バウムクーヘン積分

$\boxed{2\pi x f(x)dx}$ の寄せ集めが体積

$$dV = 2\pi x f(x)dx$$

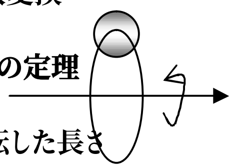
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$



[知ッ得]パップス·ギュルダンの定理

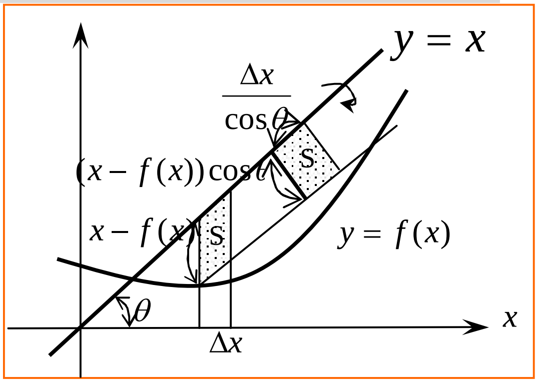
$$V = lS$$

S :面積　l :重心Gが1回転した長さ



[知ッ得] 直線 $y=x$ の周りの回転体の体積　関数の形を変えない為に回転軸方向の積分ではなく、あくまで x 軸方向の積分で

$\boxed{\pi\{(x-f(x))\cos\theta\}^2 \dfrac{dx}{\cos\theta}}$ 寄せ集めが体積



$$\Delta V = \pi\{(x-f(x))\cos\theta\}^2 \frac{\Delta x}{\cos\theta} \quad \text{より}$$

$$= \pi\{x-f(x)\}^2 \cos\theta\ \Delta x$$

$$V_{y=x} = \int_a^b \pi\{(x-f(x))\cos\theta\}^2 \frac{dx}{\cos\theta}$$

$$= \int_a^b \pi\{x-f(x)\}^2 \cos\theta\ dx$$

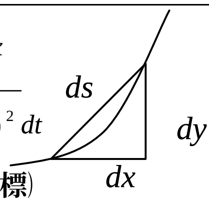
$$= \cos\theta \int_a^b \pi\{x-f(x)\}^2\ dx$$ ←この結果なら覚えやすい

③ 線素 $\boxed{ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,|dx| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,|dt|}$ の寄せ集めが曲線の長さ

曲線の長さ＝$\int$ 線素

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$$



[参考] $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2+(f'(\theta))^2}\,d\theta$ (極座標)

切り出してきた微分を x 成分 dx、y 成分 dy の2つにほぐし組み合わせてみたところで初めて意味が生じる

$$dx+dy, dx\cdot dy, (dx)^2+(dy)^2, \frac{dy}{dx}$$

III・原始関数であることから

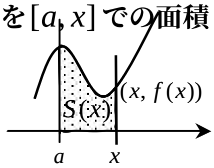
はじめに面積・体積・曲線の長さがありそれを微分したら・・・・・・・

つまり　微分の逆とういう概念で　これらの量の求め方として積分を定義する
この方法では、IIのアイデアとうまく繋がらない。

高校の教科書の方法

面積

f が考えている区間[a,b]で連続で、 $y=f(x)\geq 0$ (常に正 or 負), $S(x)$ を $[a,x]$ での面積とするとき　$S'(x)=f(x)$



[証明]　$S'(x)\overset{by\ def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{hf(t)}{h}=\lim_{t\to x}f(t)=f(x)$　[証明終]

これより　$S=S(b)-S(a)=\int_a^b f(x)dx$　を得る

$$\dfrac{dS}{dx}=f(x)$$
$$dS=f(x)dx$$

$\therefore$　**面積＝** $\int_a^b f(x)dx$

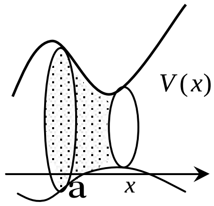
□極座標では　$S'(\theta)\overset{by\ def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\{f(t)\}^2h}{h}=\lim_{t\to\theta}\dfrac{1}{2}\{f(t)\}^2=\dfrac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$

$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2d\theta$$

体積

断面積 $S(x):a\leq x\leq b$ で連続, $V(x)$ を $[a,x]$ での体積とすると

$V'(x)=S(x)$



[証明]

$V'(x)\overset{by\ def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{V(x+h)-V(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{hS(t)}{h}=\lim_{t\to x}S(t)=S(x)$　[証明終]

これより　$V=V(b)-V(a)=\int_a^b S(x)dx$　を得る

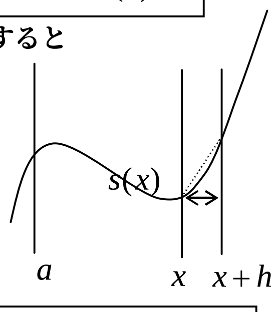
$$\dfrac{dV}{dx}=S(x)$$
$$dV=S(x)dx$$

$\therefore$　**体積＝** $\int_a^b S(x)dx$

曲線の長さ

$f(x):a\leq x\leq b$ で C^1 級関数, $s(x)$ を $[a,x]$ での曲線の長さとすると

$s'(x)=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$



[証明]　図と $s'(x)\overset{by\ def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{s(x+h)-s(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h^2+\{f(x+h)-f(x)\}^2}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\sqrt{1+\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\}^2}=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$　[証明終]

これより　$s=s(b)-s(a)=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$　を得る

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$
$$ds=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

$\therefore$　**曲線の長さ＝** $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

□媒介変数では　$s=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\{\dfrac{dy/dt}{dx/dt}\}^2}\dfrac{dx}{dt}dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2}dt$

□極座標では　$s'(\theta)\overset{by\,def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{s(\theta+h)-s(\theta)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{\{hf(\theta)\}^2+\{f(\theta+h)-f(\theta)\}^2}}{h}=\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}d\theta$$

「花プリ11」　**空間図形（非回転体・回転体）の体積**

基本は　体積＝$\int$ 断面積

[出題される背景]　学習指導要領に $Z=t$ なるキーワードがある。

	非回転体	回転体
図がイメージされるもの	断面積の計算が単純になるように切断面を選ぶ	回転軸を＝t とおく
式が与えられただけであるもの		

[手順]

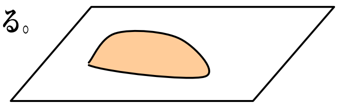
① 「はじめに図形が与えられるケース」
　は自分で座標設定して考える。

「x, y, z の関係が与えられ空間図形が定義されるケース。」
　図はイメージできなくとも　1変数を定数扱いすることで
　断面を捉えればよい。

②切断面は

（ｉ）**非回転体のときは，** $x=t$、$y=t$、$z=t$ **のいずれかで,より切断面が単純になるものを採用する。（$\sqrt{\ }$ や 2 乗を含む文字を＝t とするのがねらい目）**

領域の面積 $S(t)$ をもとめる。



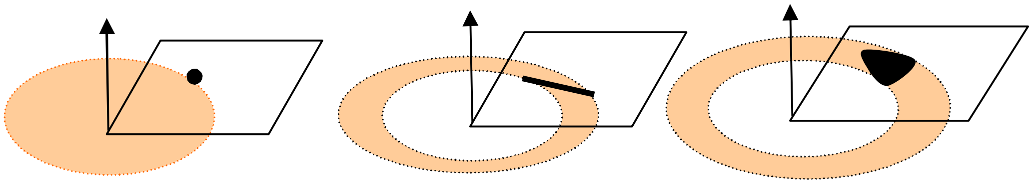
（ii）**回転体のときは，回転軸を** $=t$　**とおき切断面を捉えると**

棒を回す、板を回す、物体を回すに応じて（それは初めから不明のことが多い）

断面が　点、線分、領域となり　それを回転させた時にできる円を境界とする断面積 $S(t)$ をもとめる。[注意]　切断してから回転させることもある

　[イメージ]　体の回りを　鉛筆を回す　下敷きを回す　消しゴムを回す

（ア）　棒を回す　　　（イ）板を回す　　　（ウ）物体を回す



（ア）この場合は囲まれる部分の容積を　（イ）（ウ）こちらは回転部分の体積　が問われる。

③　積分区間は　$S(t)\geq 0$ となる t の範囲　$t_1\leq t\leq t_2$ を求める。

④　$V=\int_{t_1}^{t_2} S(t)\,dt$ を計算する。

$\boxed{\text{類題}}$　空間の回転体･非回転体の領域内における格子点の数の問題は断面内における格子点の数を $N(t)$ として　$t_1, t_2\in I$; $\sum_{t=t_1}^{t_2} N(t)$　で求められる。

[花プリ12] **ハサミウチ論法で用いる不等式**

「不等式」→「極限」 ときたら 「ハサミウチ論法」に間違いない

① **定積分数列$\{I_n\}$の$\lim_{n\to\infty} I_n$は 積分漸化式や積分不等式でハサミウチ**

$$\int_a^b h_n(x)dx < I_n < \int_a^b g_n(x)dx$$

I は Integral より

② **正項級数の収束発散[積分判定法] 部分和S_n ＝階段図形の面積を積分でハサミウチ**

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots$$

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx < 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^\alpha} < 1+\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx$$

③**ガウス記号を含む極限問題はハサミウチで**

xの小数部分について $0 \le x-[x] < 1$ だから $x-1 < [x] \le x$

④**解けない漸化式の極限** $a_{n+1} = f(a_n)$型の$\lim_{n\to\infty} a_n$は **平衡値利用 ハサミウチへ**

縮小写像の原理$\forall x, y \in R; |f(x)-f(y)| \le k|x-y|$ $0 < k < 1$

リプシッツ定数k リプシッツ連続 $f(x) = x$なるxが1つだけ存在する

$$0 < |a_n - \alpha| < k|a_{n-1}-\alpha| < k^2|a_{n-2}-\alpha| < \cdots < k^{n-1}|a_1-\alpha|$$

⑤**等差＊等比型数列の極限** $\lim_{n\to\infty} nx^n$ $(-1<x<1)$ **は2項不等式のハサミウチで**

$h>0$のとき $(1+h)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \cdots\cdots + {}_nC_n h^n \ge 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$

$$0 < n|x|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \le \frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

⑥**オーダー比較問題** $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$

$$e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2 ,(x>0) \quad , \quad 2^n > {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2$$

⑦**平均値の定理を利用した不等式**

平均値の定理より $\sin\frac{\pi x}{2} - \sin\frac{k\pi}{2n} = (\frac{\pi x}{2}-\frac{k\pi}{2n})\cos c, (\frac{k\pi}{2} < c < \frac{\pi x}{2n})$

$\frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n}$で $\frac{k}{2n}\pi < c < \frac{\pi x}{2} < \frac{k+1}{2n}\pi$ より

$$(\frac{\pi x}{2}-\frac{k\pi}{2n})\cos\frac{k+1}{2n}\pi < \sin\frac{\pi x}{2} - \sin\frac{k\pi}{2n} < (\frac{\pi x}{2}-\frac{k\pi}{2n})\cos\frac{k}{2n}\pi ,$$

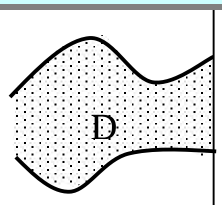
を積分

[花プリ 13]

曲線群の通過領域の問題

考え方[いろいろ]

[あのね]南京玉簾は直線群の芸である



1　直接法

①曲線群そのものを捉える

定点通過曲線群 ，平行移動曲線群, 接線群

接点が $x = t$ で $y = f'(t)(x - t) + f(t)$ の形の接線群

接点が $x = t$ でない接線群は $f - g = (x - \alpha)^2 A$ の形から

②1 変数固定（ファクシミリ方式）

$x = x_0$ と固定しパラメーターの関数としての $y = \varphi(t)$ の値域(最大･最小)を求める

2　間接法（逆手流）

③パラメーターの実数条件から→解の分離問題へ

1次(直線がx軸と共有点を持つ条件)

2次(放物線がx軸と共有点を持つ条件)

3次(3次関数のグラフがx軸と共有点を持つ条件)

④包絡線（envelope）

微分幾何学の公式利用 $\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \end{cases}$ から得られる

(とにかく求めてしまい。接することを言えばよい。)

例題　次の領域を求めよ。

（１）円群 $C_t : x^2 + y^2 - 2tx - 2(1 - t)y = 0$ の通過しない領域

2定点通過円群　　tの実数条件

（２）放物線群 $P_a : y = ax^2 + (1 - a)x + 3 - 2a \ (a \neq 0)$ の通過しない領域

2定点通過放物線群　aの実数条件

（３）$0 \leq t \leq 1$ のとき，直線群 $l_t : y = (2t - 1)x - 2t^2 + 2t$ の通過領域

tの実数解条件　xの固定方式　接線群

（４）θ がすべての実数値をとるとき，直線群 $y = (\cos\theta)x - \cos 2\theta$ の通過領域

t=cosθ　tの実数解条件　x固定方式

（５）円群 $C_k : x^2 + y^2 + x + (2k + 1)y + k^2 + 1 = 0$ の通過領域

tの実数解条件　x固定方式

（６）$|t| \geq 1$ のとき，$l_t : y = 2tx - t^2$ の通過領域（神戸大）

接線群　tの実数解条件　x固定方式

（７）$0 \leq t \leq 1$ のとき $(1 - t)x + ty = t(1 - t)$ の通過領域（東京都立大）

接線群　tの実数解条件　x固定方式

（８）$0 \leq t \leq 1$ のとき，直線群 $l_t : y = 3(t^2 - 1)x - 2t^3$ の通過領域（東大）

接線群　tの実数解条件は難　x固定方式

空間図形の方程式 [図形を決定する2つの要素を捉える]

（１）直線は，　１点と方向ベクトルを追え

$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$, $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ より　(ベクトル方程式)

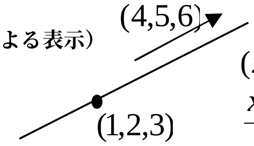
☆ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+lt \\ y_1+mt \\ z_1+nt \end{pmatrix}$ （成分による表示）

$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \end{cases}$ （媒介変数表示）, $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}(=t)$ （直線の方程式）

☆計算上は媒介変数表示を利用

☆比例式での表示　分母が0のとき分子も0とし，等号は切り離す

◇直線のいろいろな表現方法



$\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+5t \\ z=3+6t \end{cases}$

$(x,y,z)=(1+4t,2+5t,3+6t)$

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{6}(=t)$

（ｉ）＝２つは直線
$x=1, y=3, z$ は任意
（２）＝１つは平面
$x=3, y, z$ は任意　（重要）
$x-3=y, z$ は任意

（２）平面は，　１点と法線ベクトルを追え

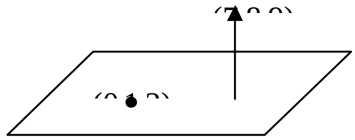
①$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ より

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

$ax+by+cz+d=0$　（制限の無い場合は “z は任意” などと明記する）

② $\overrightarrow{AP}=s\vec{u}+t\vec{v}$，　$\vec{x}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$ より

☆ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

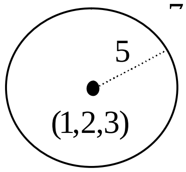


（３）球面は，　中心と半径を追え

$|\overrightarrow{CP}|=r$, $|\vec{p}-\vec{c}|=r$　$(r>0)$ より

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+p=0$



$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2$

（４）この分野でよくある２つのベクトルに垂直なベクトルの１つは外積で求まる

[Def.]ベクトルの外積　$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，　$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ のとき

$\vec{a}\times\vec{b}\overset{def}{=}(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\in V$

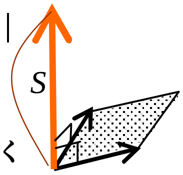
[性質]・平行四辺形の面積は外積の大きさに等しい

・外積は２つのベクトルに垂直なベクトルの１つ

・内積はスカラーだが外積はベクトル

x	y	z	x
1	0	2	1
×	×	×	
1	1	0	1
(−2	2	1)	

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$



[応用] $\vec{a}=(1,0,2),\vec{b}=(1,1,0)$ に垂直なベクトルは無数あるがその１つを求める方法

①外積を利用すると $\vec{a}\times\vec{b}=(-2,2,1)$ と上記のようにして簡単に求まる

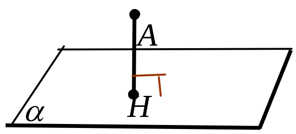
②平凡に垂直なベクトルを (a,b,c) とおき、２つ内積＝０を作り連立方程式を解く

③ [裏技] 成分に0を含むとき　$\vec{a}=(1,,0,2)$ に垂直なベクトルの1つ $(-2,\alpha,1)$ を利用する

（５）１点と平面との距離の公式（平面における１点と直線との距離の公式の拡張である）

１点 $A(x_0,y_0,z_0)$ **と空間平面** $\alpha:ax+by+cz+d=0$ **との距離は**

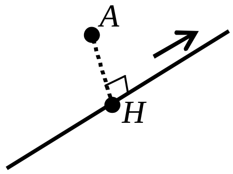
$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



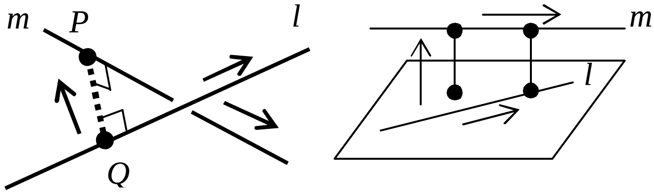
１ 点と空間直線との距離 d の公式
はあるの?→あるがやや難
垂線の足Hの求め方は→
最小値・垂直・その他

（６）空間直線・空間平面・球面の位置関係の問題
図の描き方は　正確に　と　イラスト的に　を使い分ける

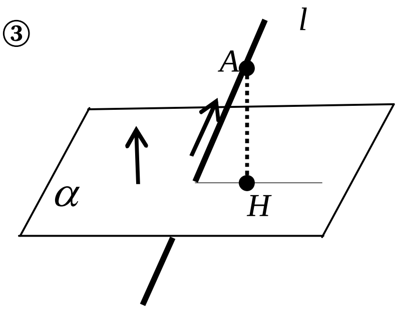
①



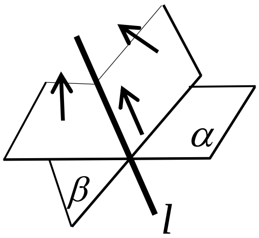
②



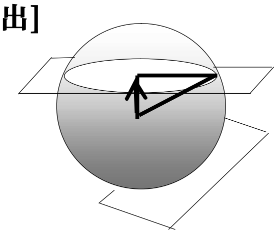
③



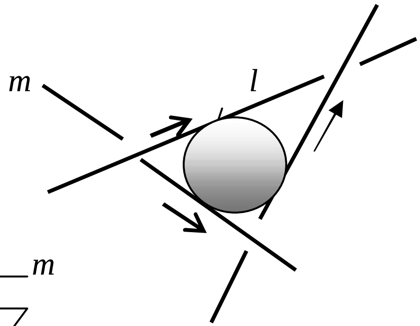
④



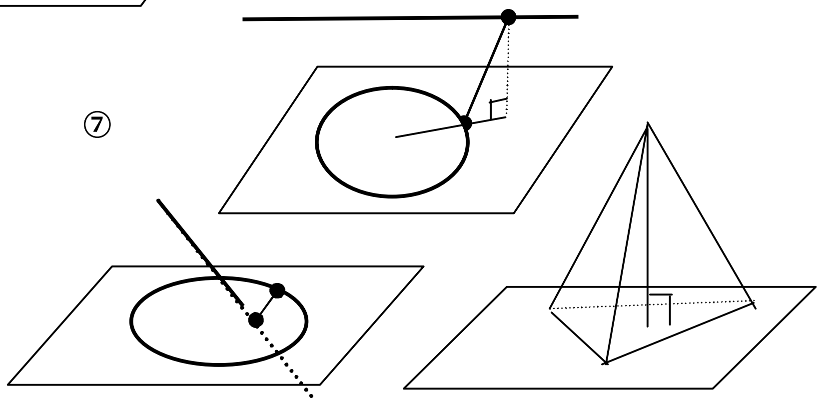
⑤[頻出]



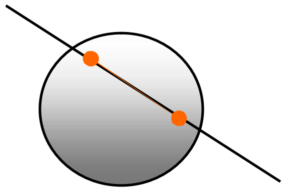
⑥



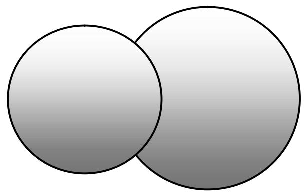
⑦



⑧



⑨



球面の接平面は公式

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = r^2$$

[基本的な話題]

① １点と直線との距離,垂線の足
② ねじれの位置にある２直線の最短距離,２直線のなす角
③ １点と平面との距離（公式あり）,垂線の足,直線と平面との交点,なす角
④ ２平面の交線,なす角
⑤ 球面と平面の交円→３平方の定理へ[最頻出]
⑥ 3 直線に接する球
⑦ 円と直線の最短距離
⑧ 球と直線
⑨ ２球面

空間直線の位置関係の問題

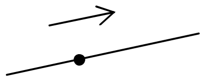
直線は　通る１点と
方向ベクトルを追え

1　[直線]　直線の方程式を求めよ。

（１）１点$(1,-2,3)$を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(2,-1,3)$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{3}$$

または$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-1t \\ z=3+3t \end{cases}$



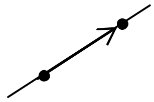
（２）２点$(-1,2,3)$，$(0,1,3)$を通る

方向ベクトル$\vec{u}=(1,-1,0)$

よって　$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{0}$

$\therefore$　$x+y=1$，$z=3$

または$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=3 \end{cases}$

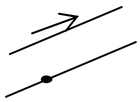


（３）１点$(1,2,-3)$を通り$\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$に平行

方向ベクトル$\vec{u}=(-3,1,-1)$

よって　$\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$

または$\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+1t \\ z=-3-1t \end{cases}$

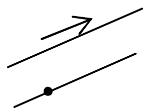


（４）１点$(3,-2,1)$を通り$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{2-y}{3}=-z$に平行

方向ベクトル$\vec{u}=(2,-3,-1)$

よって　$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{-1}$

または$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-3t \\ z=1-1t \end{cases}$



2　[１点と直線]　１点$P(1,2,6)$　と　直線$g:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+6}{-2}=\dfrac{z+6}{4}$　について

（１）垂線の足H

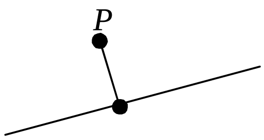
$H(2+3t,-6-2t,-6+4t)$とおける

$\overrightarrow{PH}\perp(3,-2,4)$

$\Leftrightarrow 3(3t+1)-2(-2t-8)+4(4t-12)=0$

$\Leftrightarrow t=1$

$\therefore H(5,-8,-2)$

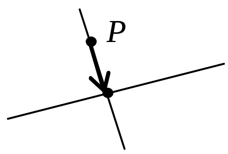


（２）Pからgに下ろした垂線l

方向ベクトル$\overrightarrow{PH}=(4,-10,-8)\,//(2,-5,-4)$

よって　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-6}{-4}$

または$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-5t \\ z=6-4t \end{cases}$



（３）Pとgの最短距離　　[空間直線は比の形より媒介変数表示が実用性あり]

最短距離は垂直なときだから（１）の結果から

最短距離は$PH=\sqrt{4^2+10^2+8^2}=6\sqrt{5}$

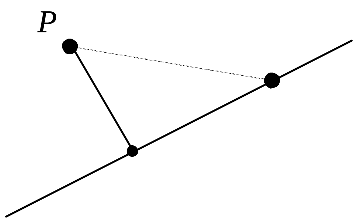
別解

g上の点$Q(2+3t,-6-2t,-6+4t)$とおける

$|\overrightarrow{PG}|^2=(3t+1)^2+(-2t-8)^2+(4t-12)^2$

$=29(t-1)^2+180\geq 180$

よって最短距離は$t=1$のとき，$\sqrt{180}=6\sqrt{5}$



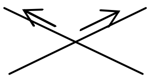
3 ［直線と直線］　２直線　$l:\dfrac{x-2}{2}=y-2=\dfrac{z+1}{-2}$　と　$m:\dfrac{2-x}{4}=y-1=z$　について，

（１）l と m のなす角 θ

方向ベクトル　$\vec{u}=(2,1,-2)$，$\vec{v}=(-4,1,1)$
のなす角を α とすると

$$\cos\alpha=\frac{-8+1-2}{\sqrt{9}\sqrt{18}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},(0<\alpha<\pi)$$

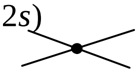
$\therefore \alpha=135^\circ$
$\therefore \theta=45^\circ$ または 135°



［ベクトルのなす角は $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$，図形のなす角は2通り一方を出題者が指定することもある］

（２）l と m の交点 P

l 上の点 $(2+2s,2+s,-1-2s)$
m 上の点 $(2-4t,1+t,t)$
だから



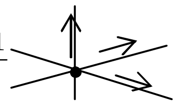
$$\begin{cases}2+2s=2-4t\\ 2+s=1+t\\ -1-2s=t\end{cases}$$ の３式共みたす $$\begin{cases}s=\dfrac{-2}{3}\\ t=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

と存在するので交点は存在し $P(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$

（３）交点を通り，l と m に垂直な直線 h

方向ベクトル　$\vec{u}=(2,1,-2)$，$\vec{v}=(-4,1,1)$ に垂直なベクトルに $\vec{u}\times\vec{v}=(3,6,6)\,//(1,2,2)$

$$h:\frac{x-\frac{2}{3}}{1}=\frac{y-\frac{4}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{2}\qquad \therefore h:3x-2=\frac{3y-4}{2}=\frac{3z-1}{2}$$

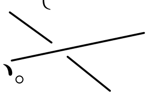


4 ［直線と直線］　２直線　$l:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{1}$　と　$m:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2},z=0$　について

（１）ねじれの位置にあることを示せ

$$\begin{cases}x=3+1s\\ y=4+1s\\ z=0+1s\end{cases}$$ と $$\begin{cases}x=2+1t\\ y=-1-2t\\ z=0+0t\end{cases}$$ より

$$\begin{cases}3+s=2+t & ①\\ 4+s=-1-2t & ②\\ s=0 & ③\end{cases}$$ ①③から $$\begin{cases}s=0\\ t=1\end{cases}$$



この値は②を満たさない。
ゆえに，l と m は交わらない
さらに，２直線からの方向ベクトルは平行（一致）ではない。
よって，ねじれの位置にある。

（２）最短距離を求めよ（京大）（その時の２点の座標）

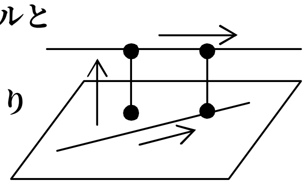
（２）$\boxed{解1}$ $|\overrightarrow{PQ}|^2=$
$(-s+t-1)^2+(-s-2t-5)^2+(-s)^2$

$=3s^2+2(t+6)s+5t^2+18t+26$

$=3(s+\dfrac{t+6}{3})^2+\dfrac{14}{3}(t+\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{7}{2}\geqq\dfrac{7}{2}$

$s=t=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

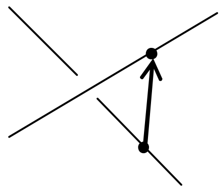
$\boxed{解2}$ l に平行で m を含む平面 α を求める。
$(2,-1,0)$ を通り　各々の方向ベクトルに垂直なベクトル $(2,1,-3)$ を法線ベクトルとするから $\alpha:2x+y-3z-3=0$
これと l 上の点 $(3,4,0)$ との距離より



$$d=\frac{|6+4+0-3|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$\boxed{解3}$ l 上の点Pは $(3+s,4+s,s)$（$s\in R$）
　m 上の点Qは $(2+t,-1-2t,0)$　　（$t\in R$）

で表される。$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-1+t-s\\ -5-2t-s\\ -s\end{pmatrix}$ であり



$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\perp l\\ \overrightarrow{PQ}\perp m\end{cases}$ のとき最短距離を与えるから

$1(-1+t-s)+1(-5-2t-s)+1(-s)=0$　①
$1(-1+t-s)-2(-5-2t-s)+0(-s)=0$　②
$-3s-t-6=0$ ①　　$s+5t+9=0$ ②

これより $s=t=-\dfrac{3}{2}$　$\overrightarrow{PQ}=(-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{14}{4}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

空間直線と平面の位置関係の問題

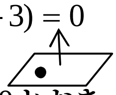
平面は，通る１点と
法線ベクトルを追え

5 ［平面］ 平面の方程式を求めよ。

（１） １点 $(1,2,3)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(2,-3,1)$

$2(x-1)-3(y-2)+1(z-3)=0$

$\therefore 2x-3y+z+1=0$



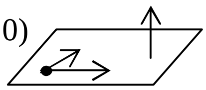
別解 $2x-3y+z+d=0$ とおき

点 $(1,2,3)$ を通ることから $d=1$

$\therefore 2x-3y+z+1=0$

（２） ３点 $A(1,-1,1)$，$B(2,1,-1)$，$C(3,3,1)$ を通る （四面体 $OABC$ の体積V）

$\overrightarrow{AB}=(1,2,-2), \overrightarrow{AC}=(2,4,0)$



法線ベクトルは外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,-4,0)//(2,-1,0)$

$2(x-1)-1(y+1)+0(z-1)=0 \therefore 2x-y-3=0$, z は任意

別解 $ax+by+cz+d=0$ とおき 3 点を代入する。

（３） ２直線 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$

$m:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{-1}=z+1$ で決定される平面

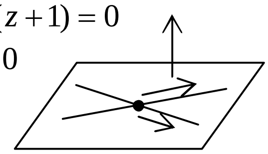
1 点 $(1,0,-1)$ を通り

法線ベクトルは $(2,-1,3),(-2,-1,1)$

に垂直なベクトルより $(2,-8,-4)//(1,-4,-2)$

$1(x-1)-4(y-0)-2(z+1)=0$

$\therefore x-4y-2z-3=0$



（４） １点 $(4,6,6)$ と

直線 $l:x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ で決まる平面

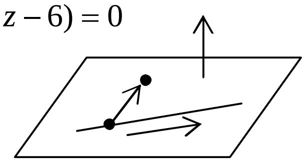
法線ベクトルは

$(4,6,6)-(2,3,4)=(2,3,2)$

と $(1,2,3)$ に垂直なベクトルより $(5,-4,1)$

$5(x-4)-4(y-6)+1(z-6)=0$

$\therefore 5x-4y+z-2=0$

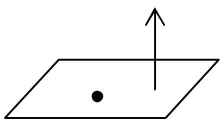


6 ［１点と平面］１点 $A(1,-1,0)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(2,-3,1)$ の平面 α について

（１）α の方程式

$2(x-1)-3(y+1)+1(z-0)=0$

$\therefore 2x-3y+z=5$

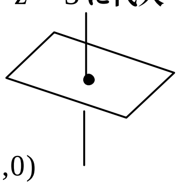


（２）α と y 軸との交点

y 軸：$x=0, z=0, y$ は任意

だから $2x-3y+z=5$ に代入

$y=-\dfrac{5}{3}$



$\therefore$ 交点は $(0,-\dfrac{5}{3},0)$

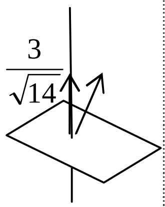
（３）α と y 軸とのなす角 θ

$\vec{n}=(2,-3,1)$ と $\vec{u}=(0,1,0)$ の

なす角を α として

$\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{14}\cdot 1}=-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

$,(0<\alpha<\pi)$

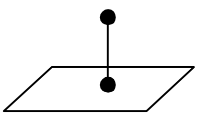


（３） 点 $P(2,-1,3)$ と平面 α について，

① P と平面 α の距離 d と下した垂線 h の方程式 ② 垂線の足 H ③ P の平面 α に関する対称点 P'

$d=\dfrac{|4+3+3-5|}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{14}}$

$h:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$



$h:\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-3t \\ z=3+t \end{cases}$ と $2x-3y+z=5$ より

$2(2+2t)-3(-1-3t)+(3+t)=5$

$t=\dfrac{-5}{14}$ $\quad\therefore H(\dfrac{9}{7},\dfrac{1}{14},\dfrac{37}{14})$

別解 $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}-\dfrac{5}{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}18\\1\\37\end{pmatrix}$

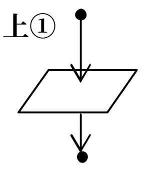
$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}$

$=2\vec{h}-\vec{p}=(\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7},\dfrac{16}{7})$

別解 $P'(a,b,c)$ と置き

P,P' の中点が α 上①

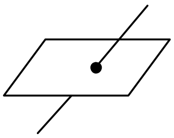
$PP'\perp\alpha$ ②



7 ［平面と直線］　平面$\pi : 3x-2y+z+14=0$　と　直線$l : x=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$について

（１）交点Ｐ

$$\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=-2+3t \end{cases}$$



を $3x-2y+z+14=0$ に代入して

$3t-2(-1+2t)+(-2+3t)+14=0$

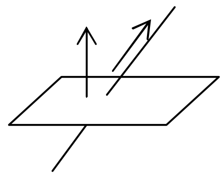
$t=-7$　∴交点Ｐ$(-7,-15,-23)$

（２）なす角θ

πの法線ベクトル$\vec{n}=(3,-2,1)$，

lの方向ベクトル$\vec{u}=(1,2,3)$

のなす角をαとすると



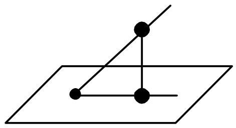
$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{1}{7},(0\leq\alpha\leq\pi)$として$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

[方向ベクトルと法線ベクトルのなす角を９０度調整]

（３）lのπへの正射影

l上の点Ａ$(0,-1,-2)$のπへの垂線の足Ｈとして正射影は直線ＰＨである

直線ＡＨは$\begin{cases} x=0+3t \\ y=-1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$



πに代入　$\pi : 3(3t)-2(-1-2t)+(-2+t)+14=0$

$\therefore t=-1$，$H(-3,1,-3)$，$\overrightarrow{PH}=(4,16,20)//(1,4,5)$

$\therefore$　$l : \dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+15}{4}=\dfrac{z+23}{5}$

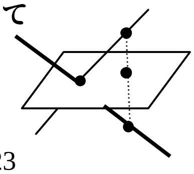
（４）lのπに関する対称な直線l'

l上の点Ａ$(0,-1,-2)$のπへの垂線の足Ｈとし

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AH}=(0,-1,-2)+2(-3,2,-1)$

$=(-6,3,-4)$で定まる点をＢとして

直線l'は直線ＰＢである



$l : \dfrac{x+7}{-6+7}=\dfrac{y+15}{3+15}=\dfrac{z+23}{-4+23}$

よって$l : \dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+15}{18}=\dfrac{z+23}{19}$

8 ［平面と平面］　２平面$\alpha : x+y-z=2$　$\beta : 2x-7y+z=4$　について

（１）交線

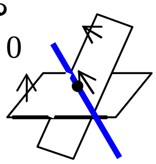
２法線ベクトル$\vec{n}=(1,1,-1)$，$\vec{m}=(2,-7,1)$

に垂直なベクトルに$(2,1,3)$がある

これが交線の方向ベクトルで$y=0$

として通る１点として$(2,0,0)$

よって$l : \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$

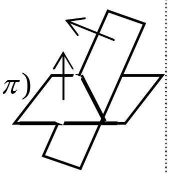


（２）なす角θ

２法線ベクトル$\vec{n}=(1,1,-1)$，$\vec{m}=(2,-7,1)$

のなす角をαとすると

$\cos\alpha=\dfrac{-6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{54}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3},(0<\alpha<\pi)$

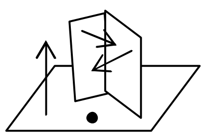


$\theta=\pi-\alpha$　または　α

（３）α,βに垂直で原点を通る平面γ

法線ベクトルは$(6,3,9)//(2,1,3)$

$\therefore 2x+y+3z=0$

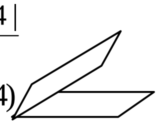


（４）α,βのなす角の２等分平面

２等分平面上の点を(X,Y,Z)とするとα,βへの距離が等しいことより

$\dfrac{|X+Y-Z-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{|2X-7Y+Z-4|}{\sqrt{4+49+1}}$

$6(X+Y-Z-2)=\pm(2X-7Y+Z-4)$



これを整理して　以下略

空間直線・平面・球面の位置関係の問題

9　**[平面と球面]**　球面 $S: x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$

平面 $\alpha: x-2y+2z=6$　　について

（１）交円の中心と半径

$S:(x-1)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$

よって中心 C $(1,-3,4)$ 半径５の球面

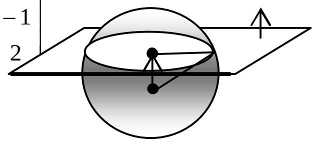
中心 $(1,-3,4)$ と平面 α との距離は

$$d=\frac{|1+6+8-6|}{\sqrt{1+4+4}}=3$$

∴交円の半径は　3平方の定理より　4

交円の中心はCから平面 α への垂線の足より

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$



このうち平面 α 上より

交円の中心は $(0,-1,2)$

[別解]垂線と平面の交点として求める

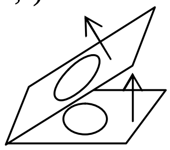
（２）　交円の xy 平面への正射影の面積

$S=S\,|\cos\theta|$ で与えられる

平面 α の法線ベクトル $\overrightarrow{n}=(1,-2,2)$

xy 平面の法線ベクトル $\overrightarrow{m}=(0,0,1)$

のなす角 α



$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{9}\sqrt{1}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{2}{3}$$

よって、平面 α と xy 平面のなす角 θ として

正射影の面積 $S=16\pi\,|\cos\theta|=\dfrac{32}{3}\pi$

「円の正射影は楕円である」

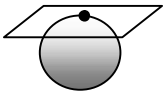
１０　**[平面と球面]**　球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-a=0$，平面 $\beta: x+2y-z+6=0$

（１）交わる条件　　　　交円の中心・半径

$S:(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=a+11$ と変形できる

$a>-11$ のとき中心 $(-1,-1,-3)$ 半径 $\sqrt{a+11}$ の球面

中心と平面 β との距離 $d=\dfrac{|-1-2+3+6|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}$

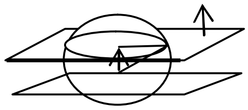


S,β が交わる $\Leftrightarrow d<r \Leftrightarrow \sqrt{6}<\sqrt{a+11} \Leftrightarrow -5<a$

半径 $r^2+\sqrt{6}^2=a+11$ ∴ $r=\sqrt{a+5}$

中心は $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}\pm\sqrt{6}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix}$$



このうち β 上にあるのは $(-2,-3,-2)$

[別解]垂線の方程式 $\begin{cases}x=-1+1t\\y=-1+2t\\z=-3-1t\end{cases}$ を

$\beta: x+2y-z+6=0$ に代入して $t=-1$

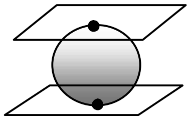
よって交円の中心は $(-2,-3,-2)$

（２）接する条件と接点

球面Sと平面 β が接する

$\Leftrightarrow d<r \Leftrightarrow \sqrt{6}=\sqrt{a+11}$

$\Leftrightarrow -5=a$



$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}\pm\sqrt{6}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

よって接点は $(0,1,-4)$ と $(-2,-3,-2)$

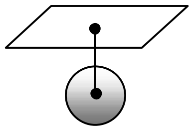
このうち β 上にあるのは $(-2,-3,-2)$

（３）離れる条件と球面と平面の最短距離

$-11<a<-5$

最短距離 $=d-r$

$=\sqrt{6}-\sqrt{a+11}$



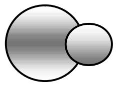
１１[球面と球面]　球面$S_1 : x^2+y^2+z^2=r^2$，球面$S_2:(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4\sqrt{2})^2=5^2$

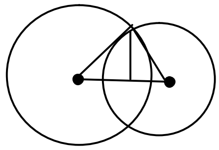
（１）共有点をもつrの範囲　　　（２）交わりが半径４の円となるときのr

中心間の距離$d=\sqrt{16+16+32}=8$

共有点をもつ$\Leftrightarrow |r-5| \leq 8 \leq r+5$

$\therefore 3 \leq r \leq 13$





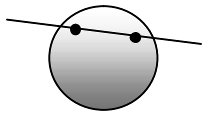
左図より

$r=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$

2[直線と球面]球面$S: x^2+y^2+z^2+3x+4y-3z=10$　と　直線$l: \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$

（１）交点　　　（２）弦の長さ

$l: \begin{cases} x=-4+2t \\ y=6-2t \\ z=3-t \end{cases}$ をSに代入して



$(-4+2t)^2+(6-2t)^2+(3-t)^2+3(-4+2t)+4(6-2t)-3(3-t)=10$

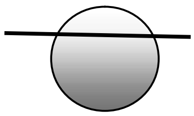
$t^2-5t+6=0 \quad t=2.3$

$\therefore$交点は$A(0,2,1), B(2,0,0)$　　弦の長さは$AB=\sqrt{4+4+1}=3$

１３[直線と球面]　球面$S: x^2+y^2+z^2=1$と　直線m：１点$(\frac{1}{2},1,0)$，方向ベクトル$(k,k,1)$

（１）交わる条件　　　（２）接する条件と接点

$m: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+kt \\ y=1+kt \\ z=0+1t \end{cases}$ ･･･①をSに代入して



$(\frac{1}{2}+kt)^2+(1+kt)^2+t^2=1$

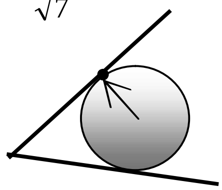
$(2k^2+1)t^2+3kt+\frac{1}{4}=0$ ･･･②の判別式Dについて　$D=9k^2-(2k^2+1)=7k^2-1$

交わる$\Leftrightarrow D>0 \Leftrightarrow k<\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}<k$

接する$\Leftrightarrow D=0 \Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$

②　に代入して

$\frac{9}{7}t^2 \pm \frac{3}{7}\sqrt{7}t+\frac{1}{4}=0$



$(\frac{3}{\sqrt{7}}t \pm \frac{1}{2})^2=0$

$t=\mp\frac{\sqrt{7}}{6}$　　$\therefore$接点は$(\frac{1}{3},\frac{5}{6},\mp\frac{\sqrt{7}}{6})$

別解 $(k,k,1)\cdot(\frac{1}{2}+kt,1+kt,t)=0$

[補足]空間内の４点でできる四面体の体積

４点$A(1,-1,1)$，$B(2,1,-1)$，$C(3,3,1)$，$O(0,0,0)$とする　四面体$OABC$の体積Vを求めよ。

平面OABの方程式α　法線ベクトル$\vec{n}=$（a,b,c）　より　$ax+by+cz=0$

三角形OABの面積$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$　より

平面OABと点Cとの距離$h=\frac{|\quad|}{\sqrt{\quad}}$より　　四面体$OABC$の体積$V=\frac{1}{3}Sh=$

大学での数学の話題紹介　興味があれば数学科へ

（１）代数的数（だいすうてきすう）（易）と超越数（ちょうえつすう）(難)　$a_0, a_1, \cdots, a_n \in Z$ (整数全体の集合)として

代数的数とは $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ の解となる数．超越数＝代数的数でない無理数

①$x^2 - 2 = 0$ の解 $\sqrt{2}$ は代数的数である．すべての有理数は代数的数

②円周率 π は超越数である.「π ＝円周の長さ/直径で定義」

（１８８２年リンデマンが証明）

超越数（極めて難）はいろんな角度から話題にされる

自然対数の底 $e = \lim_{h \to \infty}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は超越数である.（１８７３年エルミートが証明）

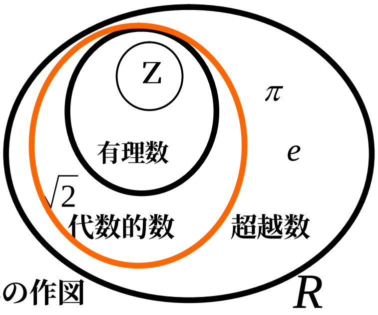
③超越数であることが予想されているものの，いまだに無理数であるかどうかさえも証明されていない数．$e+\pi$, $e\pi$ などの他

オイラーの定数 $\gamma = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\ n\right)$

$= 0.57721\quad 56649\quad 01532\quad 86060\ \cdots$

カタランの定数 $C = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$

$= 0.91596\quad 55941\quad 77269\quad 01505\ \cdots$



（２）作図が不可能である問題

①角の３等分　　②与えられた立方体の２倍の体積をもつ立方体の作図

③与えられた円と同じ面積の正方形の作図

ここで[作図とは]，定規は単に直線を引くだけの器具，コンパスは円を描くというよりは，円と円，円と直線の交点を求める　および，長さを移動するための器具として利用する

（３）フェルマーの小定理「自然数 p が素数で，p と a が互いに素であるとき，$a^p - a$ は p で割り切れる」

フェルマーの大定理（最終定理）の証明への歴史は，整数論の歴史そのものである

「$n \geqq 3$ としたとき $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない.」(1995 年ワイルズが証明)

（４）４色問題「４色あれば，どのような地図も隣り合う国が異なる色となるように各国を塗り分けられる.」(コンピュータでアッペル，ハーゲンにより解かれた)

（５）ゲーデルの不完全性定理

言語Ｌの数学的体系において公理系Ａが自然数論を含み無矛盾であるならば，

（第１）不完全性定理　言語Lの論理式 φ で，公理系Aから φ もその否定 $\neg\varphi$ も証明できないものが存在する

（第２）不完全性定理　特に“その論理的体系が無矛盾である”を意味する論理式をその体系内で証明することは不可能である

（６）代数学の基本定理：複素係数の n 次代数方程式は n 個の複素数根をもつ（ガウス）

方程式のガロア理論：５次以上の対称群は可解群ではないので，５次以上の代数方程式はもはや代数的には（すなわち $\sqrt{-1}$ や根号 $\sqrt[n]{\ \ }$ を使って）解くことができない

（７）連続体仮説（れんぞくたいかせつ）：N と R の中間の濃度（のうど）の集合は存在しない（カントール予想）

つまり　$\aleph_0$（アレフゼロ）　と　$\aleph$（アレフ）　の中間の濃度はない

（８）オイラー数（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）はトポロジーにおける最も単純な不変量

[覚え方]「線は帳面に引け」（線の数）＝（頂点の数）+（面の数）-2

（９）平行線　ユークリッドの5つの公準のうちの“平行線の公準「平行線とは交わらない直線である」”を否定して「与えられた直線外の1点を通って，この直線に平行な直線が少なくとも2本ある」からもう一つの幾何学が，さらに、射影幾何学（平行線は存在しない）も発見された

（１０）部屋割り論法　$n+1$ 個のものを，n 個の場所へ置くとすれば，少なくとも１ヶ所には２個以上の物が置かれなければならない

これ以外にも,カオス･複雑系の理論など･･･これらを背景とする入試問題もある

定義・定理・公式の意味と重要テーマ
略称『花プリ』

平成１５年　２月　１日　初版発行　　　　　限定２８０部
平成１５年１１月１３日　改訂版発行　　　　限定２８０部
平成１７年　２月２８日　改訂新版発行
平成１７年　３月２０日　初版第１刷発行
平成１８年　５月１０日　改訂版発行
平成１９年１０月１０日　ＰＤＦ版　　　　　ＣＤ
平成２０年　４月２０日　ＰＤＦ版　　　　　ネット公開

著　者　著作権者　　花房　潔
hanataroo@mvh.biglobe.ne.jp

本書の一部または全部の複写・複製を禁じます.