VI　解析学（理系）

［本質 key-word］
限りなく近づく

解析学とはニュートンやライプニッツによって切り開かれた無限を扱う数学（微分積分学＝無限小解析学）。無限大、無限小は無数にある。これらの無限大・無限小を比較し、測ることが解析の中心的課題である。そこではオーダーすなわち“大きさの程度”(order of　magnitude）が問題になり、無視できるものと圧倒されるものが区別される。

漸化式

↓ ①漸化式を解く　　②a_nを求めずに極限を話題に　　③a_nの変化の様子を話題に

$$a_n \to \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \neq 0 \qquad = 0$$

↓ ⇑ [等式変形と不等式変形]

$$S_n \to \lim_{n\to\infty} S_n$$

⇓ 発散　⇓ 不明

収束·発散の位数(オーダー)

$x\to\infty$のとき関数$f(x)$が0に収束または∞に発散する場合、

x^n　（$x\to a$なら$\dfrac{1}{(x-a)^n}$）

との比が0でない有限値に近づけば、収束·発散の位数(オーダー)がnであるという.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\,[\forall x;0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon]$$ ［$\varepsilon-\delta$論法］

⇔　xが限りなくaに近づいたとき　$f(x)$は限りなくbに近づく[限りなく近づく論法]

[極限 lim の定義]

大学では:「$\varepsilon-\delta$論法」
ユプシロン·デルタ論法で厳密に
高校では:「限りなく近づく論法」
とでも言うべき直感極限で扱う

＜秘伝＞積分 Table で合格できる積分 Table で積分をあっさりマスターすると他に時間を回すことができます．積分で悩んでいる人は勉強そのものがイヤになります．それは大変な差です．

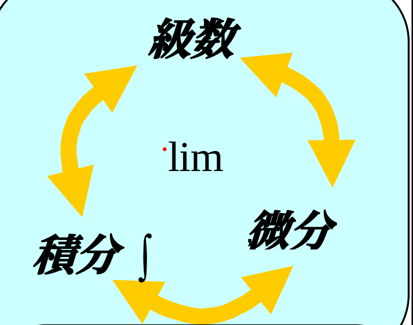
円周率はNO1　$\pi \overset{def}{=} \dfrac{\text{円周}}{\text{直径}}$

$$= \lim \frac{\text{正}\,n\,\text{角形の周}}{\text{直径}}$$

ネピア数(万有率)はNO2

$$e \overset{def}{=} \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$e^{i\pi}+1=0$　***は美の極致***



級数＝lim（部分和）
微分＝lim（平均変化率）
積分＝lim（リーマン和）
無限（lim）を扱った学問分野として級数・微分・積分」が三位一体となって展開されるのが解析学と心得よ関数の極限を微分から[ロピタルの定理], 数列の極限を積分で[区分求積法．階段図形]

指数関数 $y=e^x$ の定義[いろいろ]

A) $e^x \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} e^{x_n}$

ただし, $x_n\in Q; x_n\to x$

B) 正の値をとる連続関数で
$f(x+y)=f(x)f(y), f(1)=e$
を満たす唯1つのもの
[大学]A)B)の欠点を補うものとして

C) $e^x \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n$

D) $e^x \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

E) 微分方程式$\dfrac{dy}{dx}=y$の
$y(0)=1$　を満たす唯一の解

[比較] **三角関数の定義** $y=\sin x$
円関数

[あのね]　$1=0.99999\cdots$（いつまで行っても1にならないのに＝1とは？）

[説明]　$0.99999\cdots=0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots$　は級数でそれは部分和の極限で定義(コーシー)されると決められている。
これは無限等比級数だから公比0＜0．1＜1　より収束して公式より

$$0.99999\cdots = 0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots = \frac{0.9}{1-0.1}=1$$

つまり　$0.999\cdots \overset{by\ def}{=} \lim_{n\to\infty}(0.\overbrace{999\cdots9}^{n})=1$　つまり限りなく1に近づく.収束して**極限値が**1ということを示す式である。数学は無限回の操作をなし終えるなどとは決して企てません。[限りなく近づく論法][数の級数表現]　超越数$e,\pi\cdots$のこのような表現方法は？

数列はふつう$\{a_n\}$と表すが
・定積分で定義される数列は$\{I_n\}$
・確率の列は$\{p_n\}$
を用いる。

３３ 極限 [区別]数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} S_n$ と 関数の極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 0ri.

[解析学]極限↔微分↔積分（三位一体）と考えよ

[Def.] x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくときの $f(x)$ の近づく先 [厳密には $\varepsilon-\delta$ 論法（ユプシロン・デルタ論法）]

（１）数列の分類 複素数列も意識しておく

	①等差数列	②等比数列	③等差×等比型数列	④分数列	⑤整式列
一般項 a_n	$a+(n-1)d$ [注意]この a は第１項 a_1 であること	ar^{n-1}	nx^{n-1} など		n^k
$\lim_{n\to\infty} a_n$	∞ ,$-\infty$ は明らか	$\begin{cases} 0 & if\ a=0 or -1<r<1 \\ a & if\ r=1 \\ 以外 & 発散 \end{cases}$	$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ $(-1<x<1)$ 発散 (以外)		$k>0$:発散 $k<0$:0に収束 $k=0$:1 オーダー比較
部分和 S_n	$\frac{n}{2}(a+l)$ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$	$\frac{a(1-r^n)}{1-r},(r\neq1)$ na , $(r=1)$	S_n-rS_n	部分分数の差 $F(n+1)-F(n)$	Σの公式
$\lim_{n\to\infty} S_n$ これが無限和の定義	∞ ,$-\infty$ は明らか	$-1<r<1, a=0$ のとき $\frac{a}{1-r}$ に収束 [超重要]	重要場合分け $\lim_{n\to\infty} nx^n$ $\lvert x\rvert<1$のとき, 収束		

数列の極限は $n\to\infty$
関数の極限は $x\to a$
近づき方はいろいろ
右極限･左極限･振動
$(x\to a+0$, 右極限)
$(x\to a-0$, 左極限)

解析学（級数・微分・積分）は無限（極限）の学問その最も基礎となるのが lim の基本定理

数列・関数の極限の基本定理(証明なしで認める) $f(x),g(x)$ が a_n,b_n S_n,T_n,でも $\lim f$, $\lim g$ が共に<u>有限確定値</u>として存在するときは←[重要]有限確定値でない（$\infty,-\infty$, 振動）とき，成立する事もあればしない事もある.

$\lim(kf)=k\lim f$ 　0も有限確定値
$\lim(f+g)=\lim f+\lim g$
$\lim(f-g)=\lim f-\lim g$
$\lim(f\times g)=\lim f\times\lim g$
$\lim(f\div g)=\lim f\div\lim g$ 　$(\lim g\neq0)$
$\lim a_n$ が収束するとき $\lim|a_n|=|\lim a_n|$
(参) f が連続なら $\lim f(g(x))=f(\lim g(x))$

[知ッ得]∞無限大パワー・無限小パワーにもランクがある。このランク・オーダー比較に比の極限を調べる

$\log n<<\cdots<<\sqrt{n}<<\cdots<<n^3<<\cdots<<2^n<<\cdots<<n!<<$

$\log x<<\cdots<<\sqrt{x}<<\cdots<<x^3<<\cdots<<e^x<<\cdots$

（２）まず不定形の認識

$\frac{0}{0}$ 　$\frac{\infty}{\infty}$ 　$\infty-\infty$ 　$0\cdot\infty$ 　1^∞ 　0^0 　∞^0 など

限りなく近づける操作をした時この形になる場合，答は不定ではない.不定形とは極限が存在しないのではなく隠れている状態である

（３）[Def.]無限級数の定義 (by コーシー)

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty}S_n$$

S_∞ とかくことも

[混乱] $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ で形式的な和と，収束する時の値のどちらも表す.

[あのね]「キュウスウて知ってますか」
「・・・」「お茶飲むときに使う」

数列の項を順に加えて得られる和を<u>級数</u>という。勝手に足し算の<u>順序を変えたり括弧をつけたりはできない</u>。無限級数は部分和の極限で定義する

[覚え方] $a_n\to S_n\to\lim_{n\to\infty}S_n$

$\boxed{誤例}$ $1-1+1-1+\cdot\cdot$
$=0$, 1/2, 1？正解 なし

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が<u>存在</u>するとき，

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\times b_n)\cancel{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\div b_n)\cancel{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\div\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

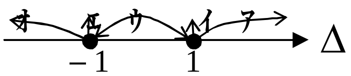
（４）等比はすべて公式[超重要]

① 一般項 $a_n=ar^{n-1}$

② 部分和 $S_n=\begin{cases} na & if\quad r=1 \\ \frac{a(1-r^n)}{1-r} & if\quad r\neq1 \end{cases}$

③ $\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases} \infty & 発散 & if\quad 1<r \\ 1 & & if\quad r=1 \\ 0 & & if\quad -1<r<1 \\ (\pm1) & 発散 & if\quad r=-1 \\ (\pm\infty) & 発散 & if\quad r<-1 \end{cases}$

Δ^∞ の極限は $\Delta=\pm1$ を境界として場合分け



$n,n-1,2n$ 乗どれでも境界は同様

[注意] $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 有限和の時も積商は不成立

超重要公式

④ 無限等比級数 $S_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq1) \\ \lim_{n\to\infty}na & (r=1) \end{cases}=\begin{cases} \frac{a}{1-r} & if\ a=0\vee-1<r<1 \\ 発散 & 上記以外のとき \end{cases}$

無限等比級数が収束⇔「初項＝0 or $-1<$公比<1」このとき, $a+ar+ar^2+\cdots=\frac{初項}{1-公比}$

（５）極限の等式変形 ［コツ］極限の基本定理より有限確定値に収束するかたまり部分を作っていく

① 不定形→$\boxed{\text{有限確定値}}$の部分を作る変形　（0も有限確定値）

（ア）分子の有理化 $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}\mp\sqrt{B}}$

［コツ］$x\to-\infty$ は $t=-x$ とおき　$t\to\infty$ とする

（イ）$1-\cos\theta=\dfrac{1-\cos^2\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}$　［注意］$x<0$ のとき $x=-\sqrt{x^2}$

α　β　0

$\lim\dfrac{\Delta\times\nabla-\Diamond}{\nabla\mathrm{O}}=\dfrac{\alpha\beta}{e}$

1　e

（ウ）[Def.]自然対数の底eの定義 $\boxed{\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e}$ に帰着［理論］　eは Euler(ｵｲﾗｰ)より

・［注意］$1+h$と$\dfrac{1}{h}$を分けて$h\to0$としないこと 1^{∞}は不定形
絶妙のバランスで

[Def.]円周率 π ＝円周の長さ÷直径で定義　←極限量

・　収束し $e=2.7\ 1828\ 1828\ 459045$ ・・・・［覚え方］鮒一鉢二鉢一鉢二鉢至極惜しい

・数列では　$(1+\dfrac{1}{n})^n\to e$　　$(n\to\infty)$　・［類似］複利計算

元利合計＝元金$(1+\text{利率})^{\text{期間の数}}$

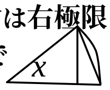
・$e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$　・$\log_e 10(=\dfrac{1}{\log_{10}e})=0.43429\cdots$を常用対数のモジュラスという

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$
$\Leftrightarrow$
$\begin{cases}a_n=\alpha+\varepsilon_n\\ \lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0\end{cases}$

・［探求］「eは無理数である」，「πは無理数である」の証明は？超越数の証明は？

（エ）$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ に帰着

この式の簡潔さは弧度法のおかげです

関数の極限は近づき方は右極限・左極限・振動
$\boxed{\text{証明}}$はこんな図形で  はさみうち論法で

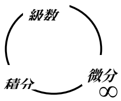
・$(0,0)$と$(x,\sin x)$の傾き　Q&A［ラジアンをつけないの？　無名数，角 $\pi=180°$，単位の変換］

・扇形の弧の長さと面積 $l=r\theta$　，$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$　これも角θが弧度法の角であることが前提

・弧度限定公式，$(\sin x)'=\cos x$　三角関数の微分･積分の公式の角はすべて弧度である

コップ１杯180cc の水を飲んで「水１０モルおいしかった」という実感をもてば化学が判る

② ロピタルの定理［ロピタル万歳］［難→易］［微分で求まる関数の極限］［知ッ得］［大学］



$\boxed{\text{不定形}\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}\text{で}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\text{ならば}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A}$　・$\lim\limits_{x\to\infty}$ のときも

$\infty-\infty$　$0\cdot\infty$　1^{∞}　0^0　∞^0　などの不定形も上の形に帰着できる

・［質問］大学入試でロピタル使っていいの？［答］判らなければ使うしかない.

区$\boxed{分}$求$\boxed{積}$法は$\boxed{積分}$の定義そのもの
極限で1つの $\dfrac{1}{n}$ と $\dfrac{1}{n}\ \dfrac{2}{n}\ \dfrac{3}{n}\cdots$ が目に付き　閉区間･連続なら定積分に帰着

③ リーマン和$R(f,\Delta)$の極限＝積分の定義そのもの［覚え方］ $\lim\sum=\int$ (ﾘﾐｯﾄシグマはインテグラル)

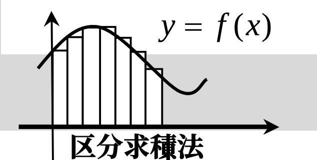
[Def.]定積分の定義　$f(x)$が連続とすると ﾘｰﾏﾝ和の極限 $\lim\limits_{\delta\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ は収束し，$\int_a^b f(x)dx$ と書く，

リーマン和である事を見抜けば積分の定義･公式で
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$

特に［0，1］で等分割･分割の端の値でﾘｰﾏﾝ和を考えたときを，区分求積法という

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots\cdots+f(\frac{n}{n})\right\}=\int_0^1 f(x)dx$$

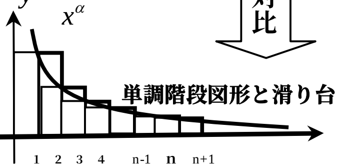
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f(\frac{0}{n})+f(\frac{1}{n})+\cdots\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right\}=\int_0^1 f(x)dx$$



区分求積法

［類似］区分求積法[0,1]と単調階段図形$[1,n]$･

対比



④ 平均変化率の極限＝微分の定義そのもの

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e^0=1,\quad f(x)=e^x$

⑤ 平均値の定理を利用することができる形（関数値の差）の極限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\lim\limits_{c\to0}e^c=1$（$c$は$o$と$x$の間より$x\to0$のとき$c\to0$）

⑥連続関数 $f(x)$において，積分の平均値の定理より $\lim\int_a^b f(x)dx=\lim(b-a)f(\alpha)$，$\alpha(a<\alpha<b)$

（６）極限の不等式変形　[超重要][☆☆☆☆☆]　Ori.

① はさみうち論法（はさみうちの原理）[易＜難＜易]

$\lim_{n\to\infty} a_n$ が$\boxed{難}$・不明のとき，$b_n \leq a_n \leq c_n$ なる b_n, c_n で

$n\to\infty$　のとき　$b_n \to \alpha$　∧　$c_n \to \alpha$　となるもの

$\boxed{易(整式・整関数が多い)}$を見つけ，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と結論する論法

（なお　$b_n < a_n < c_n$ であっても良い，　α が $+\infty, -\infty$ の場合も含める）

$g(x) < f(x) < h(x)$ で

$\lim_{x\to a} g(x) = \alpha, \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

のとき $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$

[知ッ得]ガウス記号の極限の問題は

$\boxed{x-1 < [x] \leq x}$　を利用し

はさみうち論法へ　***ガウス不等式***

② はさみうち論法でよく使われる不等式（二項定理を利用してはさみうちへ）***二項不等式***

$$h>0 のとき\ (1+h)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

③ $\lim_{n\to\infty} nx^n$ の問題，（等差×等比）型の極限[重要]

n の指数（難）＞n の２次式（易）

$-1<x<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$　（$\infty\cdot 0$ の不定形で 0 に収束）

[証明]（ア）$x=0$ のとき　明らか

（イ）$0<|x|<1$　のとき　$|x| = \dfrac{1}{1+h}$　$(h>0)$ とおける

$$0 < n|x|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

[類似・比較]

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x}$　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$

$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2, (x>0)$

$2^n > {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2$

超重要等差×等比型の和は $S_n - rS_n$ より

[応用]等差×等比型数列の無限和超重要[☆☆☆]

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

$$-)\ xS_n = \quad 1x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$$

$$= \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n \quad (x \neq 1)$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x} & (x\neq 1) \\ \dfrac{1}{2}n(n+1) & (x=1) \end{cases} \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & (-1<x<1) \\ 発散 & (\quad 以外\quad) \end{cases}$$

定積分で定義される数列の極限は***積分不等式***でハサミウチへ

$$\int_a^b h_n(x)dx < I_n < \int_a^b g_n(x)dx$$

戦場･犯人逮捕･囲碁将棋しばしば使われる作戦行動の１つ･はさみ討ちの妙技はさみうち論法は最重要テーマ（テストに良く出る）　片側が定数の場合は、ハサミウチ論法というよりは極限の定義である

[あのね]脳力は横ばいでも最高記録が永遠に出続ける。成績は上るが偏差値が６０を超えることはない

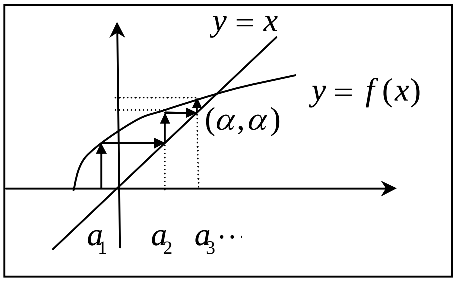
④ 単調有界列は収束する　$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq K$　（一定）ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha (\leq K)$

⑤ $a_{n+1} = f(a_n)$ 型漸化式の問題とロジスチック関数[超重要][☆☆☆]

○ 平衡値（バランスバリュ-）$\alpha = f(\alpha)$ なる α

平衡値は引く $a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - \alpha = \cdots$

○ 図を描き説明する方法も



[超重要]$a_{n+1} = f(a_n)$型，a_n が求められなくても

①a_n の取りうる範囲を押さえる　②$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を予想

③$|a_{n+1} - \alpha| < k|a_n - \alpha|$ $(0<k<1)$ の形に変形

１ 計算．式の変形で　２ 数学的帰納法で
３ 平均値の定理を利用　４ 凸関数と傾き
５ 相加相乗平均の関係　６ その他　図から
$f(x)$ に応じた様々な手法がある．

縮小写像

④ $0 < |a_n - \alpha| < k^{n-1}|a_1 - \alpha|$　$(0<k<1)$

⑤ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

この①～⑤の手順で示す

○ $0 < |a_n - \alpha| < k|a_{n-1} - \alpha| < k^2|a_{n-2} - \alpha| < \cdots < k^{n-1}|a_1 - \alpha|$　$(0<k<1)$

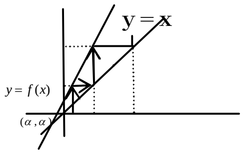
∴**はさみうち論法**により $\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$ よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を得る．（パターンを暗記する）

Ori.

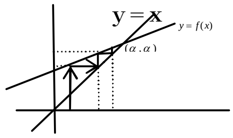
このようなグラフ上での数列の追跡法を“くもの巣”ということも

☆ $a_{n+1}=pa_n+q$ の a_n が定まる様子 ☆ $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$

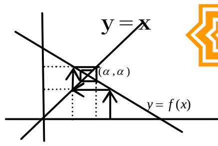
ア $1<p$ イ $0<p<1$ ウ $-1<p<0$ [超重要] 1周期点，2周期点



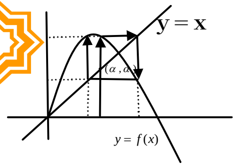
爆発系



収束



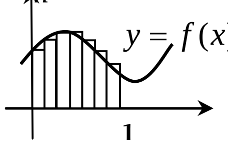
収束



ロジスチック関数[花プリ]

⑥一般調和級数 $1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots$ つまり $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1^\alpha}+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ ←部分和の極限

の収束・発散は，部分和 S_n を***階段図形の面積***と見てはさみうち論法へ



正項級数の積分判定法

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx<1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^\alpha}<1+\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx$$

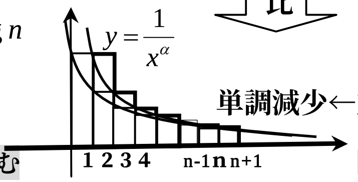
区分求積

対比

特に $\alpha=1$ のとき 調和級数 $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx$

$$\therefore\quad \log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

ゆえに $\log(n+1)\to\infty$ より $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdots$ は $+\infty$



単調減少←重要

階段図形

少しずつ小さくなる数を無限に加えるとは？！階段をすべり台で挟む

[知ッ得] 実は $\alpha>1$ のとき収束，$\alpha\leq 1$ のとき発散である ［コツ］階段をずらすか関数をずらす

⑦ ***平均値の定理***から得る不等式とハサミウチ $\sin\dfrac{\pi x}{2}-\sin\dfrac{k\pi}{2n}=\left(\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{k\pi}{2n}\right)\cos c$, $\left(\dfrac{k\pi}{2}<c<\dfrac{\pi x}{2n}\right)$

$\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}$ で $\dfrac{k}{2n}\pi<c<\dfrac{\pi x}{2}<\dfrac{k+1}{2n}\pi$ より $\left(\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{k\pi}{2n}\right)\cos\dfrac{k+1}{2n}\pi<\sin\dfrac{\pi x}{2}-\sin\dfrac{k\pi}{2n}<\left(\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{k\pi}{2n}\right)\cos\dfrac{k}{2n}\pi$, を積分

（７）無限級数の発散判定条件（収束判定条件は一般にはない．等比にはあるが）

① “$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$ ”は真

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\alpha$ と存在するから

証 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\alpha-\alpha=0$

② よってこの対偶も正しい“ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散 ”は真

これが発散の判定に使える発散判定条件

[覚え方] 級数の収束・発散検査はまずスクリーニングを実施

③ 逆は必ずしも真ならず“ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0\to\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束 ”は成り立たない

反例 調和級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdots$ 一般項は０に収束するが，この級数は $+\infty$ に発散する[証明も重要]

④[大学] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束（絶対収束）$\Rightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束 絶対収束と条件収束がある

（８）無限級数の収束・発散の判定手順

級数のテーマ①収束発散を考える②級数で表す例テーラー展開マクローリン展開

(手順1) 等比か調べる 等比ならば公式で なければ手順2へ

(ア) 初項＝0 または $-1<$公比<1 のとき収束し 和は $\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}$ (イ) 以外は発散

(手順2) 一般項の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を調べる $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ なら発散←発散判定条件

[大学]正項級数の
・積分判定法
・比較判定法

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ なら収束か発散か判らないから手順3へ

(手順3) 定義に従う部分和 S_n を求め $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を調べる 部分和 S_n が求まらないときはハサミウチ論法で

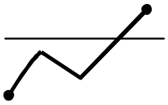
あくまで部分和の極限として定義されている（コーシーの定義）.等比のみ公式で例外と思え

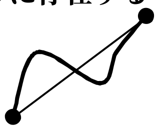
３４ 連続と微分可能と積分可能

[易しく言えば]連続とはつながっていること．微分可能とは途中で切れたり折れていたりしないで滑らかにつながっていること，　[a,b]で連続なら積分可能

（１） 連続性と微分可能性[理論][超重要][☆☆☆]（神大）

[理論]		
１点で	[Def.] $f(x)$が $x=a$ で連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つ	[Def.] $f(x)$が $x=a$ で微分可能 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する
区間で	区間連続の性質 [Th.] ***中間値の定理*** が成り立つ $f(x)$が$[a,b]$で連続ならば $f(a)$と$f(b)$の間の任意のmに対し $f(c)=m$ なるcが（少なくとも１つ）$a<c<b$に存在する	区間微分可能の性質 [Th.] ***平均値の定理*** が成り立つ $f(x)$が(a,b)で微分可能，$[a,b]$で連続ならば $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ なるcが少なくとも１つ $a<c<b$に存在する





「関数はグラフのようなものだから $y=f(x)$ がつながっていることを用いれば明らかなことではないか」は誤。関数は視覚的グラフとは何の関係もない。グラフが関数にべったりと依存しているだけ。だから一般の関数に関する証明にグラフは使えないのである

証明は大学で、このあたり前の事実が威張っているのはなぜだろう

平均値の定理＝因数取り出し定理

[意味]平均値の定理 考えている区間でなめらかなら平均変化率＝微分係数（があり）（２点の傾き）＝（１点での傾き）なめらか関数の**関数値の差を簡単にできる定理**

①**連続の定義**　$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$が成立　**別表現** $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$　よって $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

②**微分可能の定義**　$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき $f'(a)$ と書く，**別表現** $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が存在←平均変化率の極限

③**導関数の定義**　$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき $f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ と表す

級数　積分　lim　微分

④**定積分の定義**　$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ が存在するとき $\int_a^b f(x)dx$ と表す $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x_i$ が存在←リーマン和の極限

クシイ

区分求積法が積分の定義そのものである　**「連続関数は積分可能」が厳密に証明される**。微分と積分が互いに逆の操作であることがニュートン・ライプニッツにより発見され，積分の計算が原始関数でもって楽にできるようになった．「微分積分いい気分」

[Th.]微分積分法の基本定理　$[a,b]$で f：連続のとき　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$，$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$　$(G'(x)=f(x))$

[重要]“**微分可能⇒連続⇒**積分可能”$\boxed{\text{証明}}$ $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x=$有限確定値・$0=0$

性質 f,g **：連続[微分可能]**$\Rightarrow \alpha f\pm\beta g(\alpha,\beta\in R),\ fg,\ \dfrac{f}{g}(g\neq 0),\ f\circ g$ **も連続[微分可能]**

[覚え方]　中間値の定理と平均値の定理の覚え方→「中間テストの平均点」

（２）平均値の定理の使い方[☆☆☆][と言えば]

$\boxed{\text{例}}$ $\sin x, e^x, \log x$ は定義域で微分可能だから

$\sin b-\sin a=(b-a)\cos c$，$c$は$a$と$b$の間

$e^y-e^x=(y-x)e^c$，cはxとyの間

$\log\dfrac{b}{a}=\log b-\log a=(b-a)\dfrac{1}{c}$，$c$は$a$と$b$の間

$(\dfrac{k+1}{2n})^{100}-(\dfrac{k}{2n})^{100}=\dfrac{1}{2n}100c^{99}$　$(\dfrac{k}{2n}<c<\dfrac{k+1}{2n})$

a,bが複雑でもできるように

[参考]平均値の定理の別表現　**ロルの定理**

「$f(x)$が(a,b)で微分可能，$[a,b]$で連続で $f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ なる c が少なくとも1つ $a<c<b$ に存在する」

「$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$なる$\theta$が存在する」

[傾きと違ったとらえ方][超重要]
２文字が主役の式で滑らか関数の関数値の差 $f(b)-f(a)$ という形のときはすぐ連想を
平均値の定理＝***因数取り出し定理***
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$
[左辺難→右辺易]　$a<^{\exists}c<b$
$f(b)-f(a)$ から $b-a$ がくくり出せるということ

積分の平均値の定理
$f(x)$が連続のとき，$a<^{\exists}c<b$；
$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$
は地ならし定理

３５ 区間で異なる式の関数の表現

（１）関数の表現には次の５種類ある

$\boxed{1}$ $y=f(x)$ 陽関数表示　２変数関数 $z=f(x,y)$ もある

$\boxed{2}$ $y=f(x)=\begin{cases} & if \\ & if \\ & if \\ & if \end{cases}$ の形は[頻出]

$\boxed{3}$ $f(x,y)=0$ 陰関数表示　陰関数 $x^2+y^2=1$ は２つの関数 $y=\sqrt{1-x^2}$ と $y=-\sqrt{1-x^2}$ を表す

$\boxed{4}$ $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 媒介変数表示

$\boxed{5}$ $r=f(\theta)$, $f(r,\theta)=0$ 極方程式

パラメーターの t,θ は時間と角のイメージ　$\theta=\omega t$（ω は角速度：定数）

$t \overset{f}{\mapsto} x \mapsto y$, $t \xrightarrow{g} y$

２区間によって異なる式で与えられる関数

絶対値　$y=|x|$　（連続）

ガウス記号 $y=[x]$　（不連続）

極限で定義される関数 $y=\lim_{n\to\infty} x^n$

定積分で定義される関数 $y=\int_0^x |t-1|\,dt$

周期関数などで

グラフ，連続性，微分可能性，定積分,合成など豊富な話題がある．入試問題の宝庫

[Def.]実数の絶対値の定義

$|x| \overset{def}{=} \begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

・絶対値ははずす，はずし方「中が正ならそのままはずし中が負なら－を付けてはずす」

・一気にはずす時は要注意

$|A|<B \Leftrightarrow -B<A<B$　だが

$|A|=B \Leftrightarrow A=\pm B$ は誤り

$|A|=B \Rightarrow A^2=B^2 \Leftrightarrow A=\pm B$

（２）具体例

$\boxed{1}$　関数のテイラー･マクローリン級数，フーリエ級数も関数の1つの表現方法。定積分関数。2変数関数 $z=f(x,y)$ は1変数を固定して考える

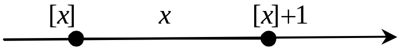
$\boxed{2}$　**絶対値関数・ガウス関数・周期関数**（２変数の微積は大学で）

①絶対値は｜　｜の中が０となる場所が境界

２次元絶対値は境界を平面で捉える $\boxed{例}$　$|x|+|y-1|<|x+y|$

絶対値の定積分は超重要

②ガウス記号は[　]の中が整数となる点が場合分けの境界



小数部分は　$0\leq x-[x]<1$　より　$\boxed{x-1<[x]\leq x}$ を利用，はさみうち論法へ

$\boxed{例}$　$f(x)=x^2+[x]=\begin{cases} x^2-1 & (-1\leq x<0) \\ x^2+0 & (0\leq x<1) \\ x^2+1 & (1\leq x<2) \\ x^2+2 & (2\leq x<3) \end{cases}$

[Def.] ガウス記号の定義

$[x]\overset{def}{=} x$ を越えない最大の整数

極限問題は　$x-1<[x]\leq x$

を使い，はさみうち論法へ

［類］

$\lim \Delta^n$ は

$\Delta=\pm 1$ が

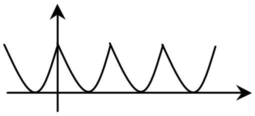
場合分けの

境界

[なーんだ]，$[x]$ は $x\geq 0$ では小数点以下切捨てということ　$\{x\}$: x の小数部分も出る

③ [Def.] $f(x)$ が周期 p の周期関数 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x\in R;\ f(x+p)=f(x)$

$\boxed{例}$ $\begin{cases} \forall x\in R;\ f(x+2)=f(x) \\ f(x)=(x-1)^2 \quad (0\leq x<2) \end{cases}$



初等関数には

整関数　分数関数　無理関数

三角関数　指数関数　対数関数　逆三角関数　双曲線関数

逆双曲線関数　がある

特殊関数は・・

$\boxed{3}$　陰関数表示は２次曲線，$\boxed{4}$ 媒介変数表示，$\boxed{5}$　極方程式　は別章を参照

（３）***区間で異なる式で与えられた関数***の境界点での連続性と微分可能性の判定

①グラフが描けるものは，つながるように，滑らかにつながるように考える

②グラフが描けないものは定義に従って極限の計算を行う

$x=0$ で連続か，連続ならさらに微分可能か

$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$

は $n\geq 2$ のとき

$x=0$ で微分可能が示せる

$\boxed{例1}$ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ $\boxed{例2}$ $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

$\boxed{例1}$ は $x=0$ で連続しかし微分可能でないが

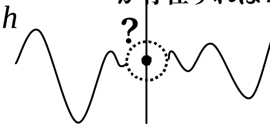
$\boxed{例2}$ は $x=0$ で連続かつ微分可能である

直感では判らない，計算で示す事

$x=0$ で定義されてなかったものを，$x=0$ のとき $y=0$ と定義してやるとどのようになったか

グラフが描けないので，つながったか，滑らかにつながったか，計算によって調べるしかない

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ が成り立てば $x=0$ で連続，$f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ が存在すれば $x=0$ で微分可能



３６ 微分法

微積分の顔 $f'(x)$ と $\dfrac{dy}{dx}$ をうまく使い分けたり混在させたり $dy = f'(x)dx$

（１）[Def.] $f(x)$ の導関数の定義 [start]

$$f'(x) \overset{def}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{dy}{dx} \overset{def}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

① $\dfrac{dy}{dx}$ は1つの記号 (極限値記号)（デーワイデーエックス），$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は分数（デルタエックス分のデルタワイと読む） Δx は x の小さな変化を表し，Δx で1つの記号 dx はその極限状態を表す

Def $f(x)$ の原始関数 $G(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} G'(x) = f(x)$

テストによく出る．微分は極限で定義されている

② $f(x)=\sin x$， $f(x)=\log_a x$ の定義による微分に $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ が必要となる

積分　微分

（２）どんな関数にも共通な微分法の公式[これだけ]

微分 table と積分 table

和・差 $(f\pm g)'=f'\pm g'$ ，実数倍 $(kf)'=kf'$

積 $(fg)'=f'g+fg'$，$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$， 商 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & u \arrow[r] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & x \arrow[r] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

合成 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ ，媒介 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)$ ，逆 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

逆方向から微分する奇策

この積と合成の逆が部分積分と置換積分

$\int f'g = fg - \int fg'$

$\int y\,dx = \int y \dfrac{dx}{dt}dt$

[証明] $\because \dfrac{dy}{dx} \overset{by\ def}{=} \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

定義　　微分可能のとき，右辺の極限が存在するから，また連続だから

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right)$ を $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ と書く

・$\dfrac{dy}{dx}$ は「ﾃﾞｨｰﾜｲ･ﾃﾞｨｰｴｯｸｽ」と読む.「dx 分の dy」とは決して読まないが分数と同じような振る舞いをするスゴイだろう (ﾗｲﾌﾟﾆｯﾂ)

（３）個別の関数の微分公式

公式は便利には違いないが定義からは遠くなる。痛しかゆしである。

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha\in R$）， 特に $\alpha=-1,\dfrac{1}{2}$ として，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$，$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\log a$

不死身の e^x

$$\begin{tikzcd} & \sin x \arrow[dl] & \\ \cos x \arrow[dr] & & -\cos x \arrow[ul] \\ & -\sin x \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$， $(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$， $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

対数を微分すると分数になる

[大学]逆三角関数も微分の公式に当たり前に加える

$(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

証明は逆関数の微分公式より容易 積分で威力

$x\log x - x \to \log x \to \dfrac{1}{x}$

[注意] ① x^α, a^x, x^x の違いに留意，$(x^x)'=x\cdot x^{x-1}$ は誤 ，対数微分法で,または $e^{\log x^x}$ から

② $y=\sin 2x$ のとき $X=2x$ とおくと $y=\sin X$ より微分して $y'=\cos X=\cos 2x$，(X を元に戻した) は誤，上の式に現れた y' は $\dfrac{dy}{dX}$ で，$\dfrac{dy}{dX}=\cos X$ です．そして求めたいのは $\dfrac{dy}{dx}$ ですから正しくは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dX}\cdot\dfrac{dX}{dx}=\cos X\cdot 2$ ここで X を元に戻して $y'=2\cos 2x$ となります．微分は常にどの変数による微分かを明確にせよ．実際の利用は，次の形で覚える．ただし，Δ は x の関数 $f(x)$ とする．

$(\Delta^\alpha)'=\alpha\Delta^{\alpha-1}\Delta'$（$\alpha\in R$），$\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)'=-\dfrac{1}{\Delta^2}\Delta'$，$(\sin\Delta)'=\cos\Delta\cdot\Delta'$， $(\cos\Delta)'=-\sin\Delta\cdot\Delta'$

$(\tan\Delta)'=\dfrac{1}{\cos^2\Delta}\Delta'$，$(\log\Delta)'=\dfrac{1}{\Delta}\Delta'$ $\boxed{\text{対数微分法}}$ $(\log|\Delta|)'=\dfrac{1}{\Delta}\Delta'$，$(\log_a\Delta)'=\dfrac{1}{\Delta\log a}\Delta'$

$(e^\Delta)'=e^\Delta\Delta'$，$(a^\Delta)'=a^\Delta\log a\cdot\Delta'$ ，$\{F(\Delta)\}'=F'(\Delta)\Delta'$ ，$\dfrac{d}{dx}f(y)=f'(y)y'$

$(\sin^{-1}\Delta)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\Delta^2}}\Delta'$ $(\tan^{-1}\Delta)'=\dfrac{1}{1+\Delta^2}\Delta'$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y \arrow[r] & f(y) \end{tikzcd}$$

（4）接線

① **3つの接線**　$\boxed{1}$上の点　　$\boxed{2}$傾き m　　$\boxed{3}$点を通る（点から引いた）

$(a, f(a))$ における接線　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$　　（公式）

$(a, f(a))$ における法線　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$　　（公式）

接線といえば
接点$(a, f(a))$
を押さえる

② **媒介変数の接線の公式[☆☆☆][重要][盲点]**

$\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=g(\theta) \end{cases}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$

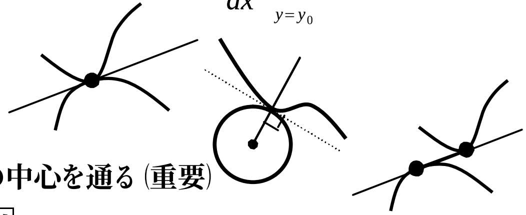
方向ベクトル
$\vec{u}=\begin{pmatrix} f'(\theta) \\ g'(\theta) \end{pmatrix}$

$\dfrac{x-f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}=\dfrac{y-g(\theta_0)}{g'(\theta_0)}$ （公式） または

$y-g(\theta_0)=\dfrac{g'(\theta_0)}{f'(\theta_0)}(x-f(\theta_0))$ （公式）

③ **陰関数表示の接線の公式**　$f(x, y)=0$ 上の点 (x_0, y_0)；　$y-y_0=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}(x-x_0)$

④ **共通接線の問題**[いろいろ][☆☆☆]



$\boxed{1}$　$x=a$ で共通接線をもつ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$

$\boxed{2}$　円との共通接線問題→接点における法線が円の中心を通る（重要）

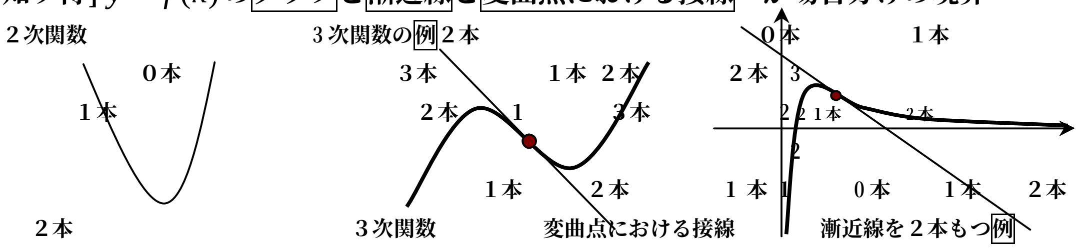
$\boxed{3}$　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線の問題の$\boxed{\text{方針}}$

$\boxed{\text{方針}}$ ①一方の接線が他方に接するようにする　　②各々の接線を求めそれが一致するようにする

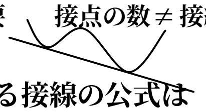
③ $y=mx+n$ とおき　接する条件より（2次なら $D=0$）　円との共通接線問題→法線が中心を通る

⑤ **引ける接線の本数の問題[☆☆☆]（$\boxed{\text{類}}$　法線の本数）**

[知ッ得] $y=f(x)$ の$\boxed{\text{グラフ}}$と$\boxed{\text{漸近線}}$と$\boxed{\text{変曲点における接線}}$　が場合分けの境界



[注意]　曲線との接点を2つ以上もつ接線の存在可能性のチェックも必要　　接点の数 ≠ 接線の本数の例



⑥ **円・楕円・放物線・双曲線の接線の公式**

$\boxed{1}$[知ッ得]曲線 $F(x^2, y^2, x, y)=0$ の曲線上の点 (x_0, y_0) における接線の公式は

形式的に $x^2 \to x_0x$　, $y^2 \to y_0y$　, $x \to \dfrac{x+x_0}{2}$　, $y \to \dfrac{y+y_0}{2}$ の置き換えで得る

$\boxed{\text{例}}$[公式]　$y_0y=4p\dfrac{x+x_0}{2}$,　　$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$,　　$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

$x_0x+y_0y=r^2$　,　$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

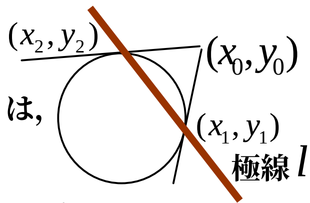
$\boxed{2}$[知ッ得]　$\boxed{x_0x+y_0y=r^2 \text{ は } (x_0, y_0) \text{ が円外の点のとき極線になる}}$

$\boxed{\text{証}}$　円の上の点 (x_1, y_1) (x_2, y_2) における2つの接線

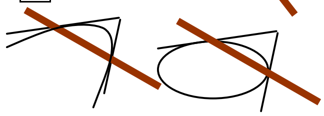
$x_1x+y_1y=r^2$,　$x_2x+y_2y=r^2$　が (x_0, y_0) を通るとき,

$x_1x_0+y_1y_0=r^2$,　$x_2x_0+y_2y_0=r^2$　よって　$x_0x+y_0y=r^2$ は,

2点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線（極線という）である　$\boxed{\text{終}}$



この独特な証明法を理解しておく．放物線，双曲線も同様



３７ 様々な関数のグラフ[花プリ]　　Ori.

（1）グラフの描き方[付録の様式を参考に]

$\boxed{1}$ $y=f(x)$　まず手順① y で描く[超重要]

$\boxed{2}$ $y=\begin{cases}\text{座標軸との交点}\\ \text{概形をつかむ}\\ \text{漸近線　定義域}\end{cases}$

そのあと手順② y' で描く

増減・極値

そのあと手順③ y'' で描く

おうとつ・変曲点

[公式] $f'(x), f''(x)$ が存在するとき

（ｉ） $f''(\alpha)<0$ である区間で上に凸

（ii） $\begin{cases} f'(\alpha)=0 \\ f''(\alpha)<0 \end{cases} \Rightarrow x=\alpha$ で極大

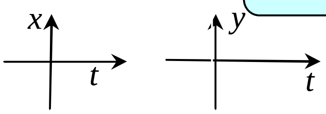
（iii）$(\alpha, f(\alpha))$ が変曲点 $\Rightarrow f''(\alpha)=0$

（iv）$(\alpha, f(\alpha))$ が変曲点 $\Leftrightarrow$

$f''(x)$ が $x=\alpha$ の前後で符号変化する

$\boxed{3}$　$f(x,y)=0$ は $y=F(x)$ の形にしてから

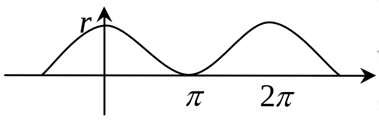
$\boxed{4}$　$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ のグラフは

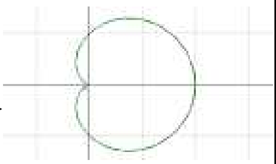


のグラフを参考に描くとよい

$\boxed{5}$　$r=f(\theta)$ は $\theta-r$ のグラフも参考に

$\boxed{例}$　$r=1+\cos\theta$ カージオイド

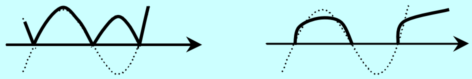




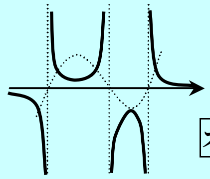
① y で描く（y で十分描けるんです）[超重要]

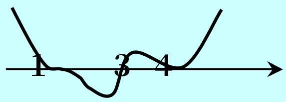
[コツ]微分によらない概形をまずつかむ

$\boxed{ア}$ $y=|f(x)|$　$\boxed{イ}$ $y=\sqrt{f(x)}$　[覚え方] $\sqrt{}$ の形

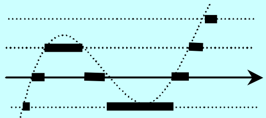


$\boxed{ウ}$ $y=\dfrac{1}{f(x)}$　$\boxed{エ}$ $y=(x-1)^3(x-3)(x-4)^2$





$\boxed{オ}$ $y=[f(x)]$ ガウス記号



絶対値　ルート　逆数

n 次の接触とその他

逆関数，関数の和・積

まつわり曲線なども重要 $\boxed{カ}$ $y=\{f(x)\}$ 小数部分

② y' は y の傾き $y''=(y')'$ は傾きの変化率と読め

③増減表と凹凸表は別々に書く方がずっと楽だ

おなじみの不等式の証明への応用

$x>0,\quad e^x>1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$

[裏技1]　$g(x)=e^{-x}\left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$ とおき

$g'(x)=-e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}<0$　，$g(0)=1$

$\therefore g(x)<1$ より与式を得る．←スゴイ

[裏技2] $\displaystyle\int_0^1 e^x dx>\int_0^1(1+x)dx$ を繰り返す

(参) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$ マクローリン展開

[知ッ得]極方程式を媒介変数表示に直す方法と特別な形の媒介変数表示を極方程式にできる公式

$$r=f(\theta)\Leftrightarrow\begin{cases} r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \\ r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$$

$y=e^x$　the king(不死身の e^x)
the exponential function

（2）代表的なもの BEST１０　これらの概形は覚えておかないと間に合わない　Ori.

① $y=\dfrac{\log x}{x}$（最頻出）　② $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ カテナリー（懸垂線）双曲線関数　電線の弛み

③ $y=e^{-x^2}$（ガウス曲線の原型）　④ $y=x+\sin x$（まつわり曲線）⑤ $y=e^{-x}\sin x$ 減衰曲線

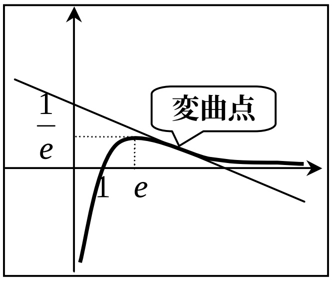
⑥ $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ⑦ $y=\dfrac{1}{x^2+1}$（山型曲線）⑧ $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ $(a>0)$ サイクロイド（かまぼこ型）
最速降下線

⑨ $\begin{cases} x=e^{-\theta}\cos\theta \\ y=e^{-\theta}\sin\theta\end{cases}$ スパイラル曲線(渦巻き) $r=e^{-\theta}$ ⑩ $\begin{cases} x=a\sin^3\theta \\ y=a\cos^3\theta\end{cases}$ アステロイド　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$
と書けば $x>0, y>0$

[あのね]　カテナリーは懸垂線　ａステロイドは副腎皮質ホルモン？

（3）多くの問題は，応用問題→関数→グラフ→応用の形をとる[超重要]

例1 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ [最頻出]のグラフからの問題は豊富



グラフは $y=\log x,\ y=\dfrac{1}{x}$ の積、凹凸，変曲点，漸近線まで求める

① $a^b=b^a$ を満たす自然数 ↔ 対数を取ると $\dfrac{\log a}{a}=\dfrac{\log b}{b}$

② e^{π} と π^{e} の大小比較 ↔ $\dfrac{\log e}{e}$ と $\dfrac{\log \pi}{\pi}$ の大小から

③ $a\leqq x$ なるすべての x で $f(a)\geqq f(x)$ となる a ↔ $a\leqq x$ で単調減少

④ $kx=\log x$, $x-\log_a x=0$, $\sqrt[n]{x}=\log x\ \ (n\in N)$ などの実数解の個数

⑤ 引ける接線の本数→ $y=f(x)$ の$\boxed{\text{グラフ}}$と$\boxed{\text{漸近線}}$と$\boxed{\text{変曲点における接線}}$が場合分けの境界

⑥ 原点 O と $y=\log x$ 上の点 A とを結ぶ線分 OA の傾きが $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$， $\dfrac{\sin x}{x}$ も同様

⑦ n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ に関する問題（数学的帰納法） ⑧ 数列 $a_n=\sqrt[n]{n}$ の最大値

⑨ $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx\to\int f(\log x)\frac{1}{x}dx$ 型置換積分で，体積なら $\displaystyle\int_a^b\pi\frac{(\log x)^2}{x^2}dx$?，曲線の長さは？

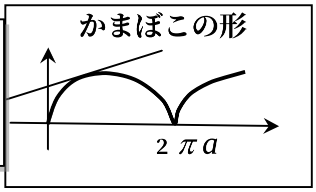
[重要] y 軸の周りの回転 $V_y=\displaystyle\int_c^d\pi x^2dy$ は， $y=\dfrac{\log x}{x}$ より $dy=\dfrac{1-\log x}{x^2}dx$ （置換積分で）

例2 $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ サイクロイドの $y=F(x)$ の形は f^{-1} は存在するから $y=(g\circ f^{-1})(x)$
$(a>0)$ [最頻出]←サイクロイドはパラメーター表示のみ

サイクロイド曲線は円が直線上を滑ることなく転がったときの円上の１点の軌跡としてグラフは計算でなく初めから知っておくべきもの．直線・円に次ぐ身近な曲線です（でんぐり返りしたときの頭の描く軌跡として体験．サイクロイドめまい）

① 接線・面積・体積・曲線の長さ，位置・速度・加速度・道のり
などすべての項目が求められる[万能曲線]

２つの顔
$f'(x)$ と $\dfrac{dy}{dx}$ と混合
をうまく使い分ける



② 微分は $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{g'(\theta)}{f'(\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

２階微分は $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\cdots=\dfrac{-1}{(1-\cos\theta)^2}<0$

③ 積分は置換積分法で $S=\displaystyle\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta g(\theta)\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_\alpha^\beta g(\theta)f'(\theta)d\theta$ [基本重要]

計算は区間によっては Wallis の公式を利用出来ることもある

例3 回転と拡大 [いろいろ]

$\begin{cases}x=e^{-t}\cos t\\ y=e^{-t}\sin t\end{cases}$ 媒介変数表示（スパイラル曲線）

① 渦巻き曲線になることは知っておく
② 曲線の長さ 囲まれた部分の面積等が等比級数になる
③ 位置・速度・加速度，道のり の問題も

[使える] $P\ (x,y)$ を原点中心に θ だけ
回転した点が $P'\ (x',y')$

$\Leftrightarrow\ x'+y'i=(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{類}}$ $y=e^{-x}\sin x$ （減衰曲線）も[超重要]

[複素数平面では] $w=z^n$， $z_{n+1}=\alpha z_n+\beta$ 複素数平面上のスパイラル点列（旧課程）

[一次変換では] $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 回転と拡大 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

（4）知っておくべき、基本的な話題に上がる関数のグラフ

① $y=\dfrac{\log x}{x}$ (最頻出)　② $y=e^{-x^2}$　③ $y=\dfrac{1}{x^2+1},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

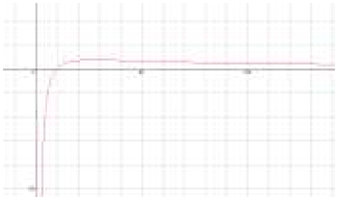
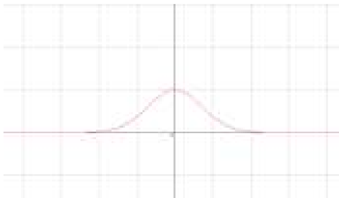
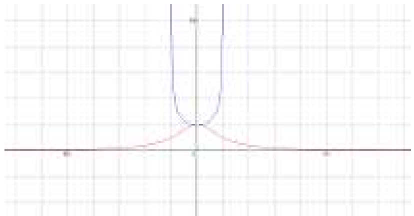
$(0,0)$ と $y=\log x$ 上の点 $(x,\log x)$ の傾き

[大学]素数定理「n 以下の素数の数 $\pi(n)\sim\dfrac{n}{\log n}$」

標準正規分布曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

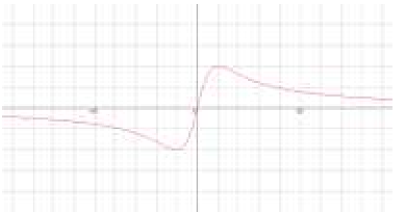
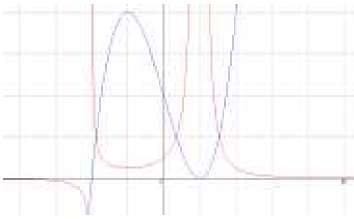
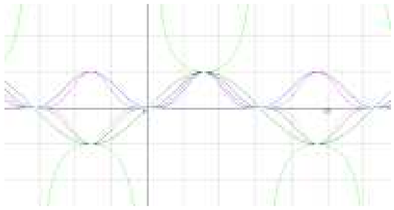
[大学] $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$

[大学] $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+C$, $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$

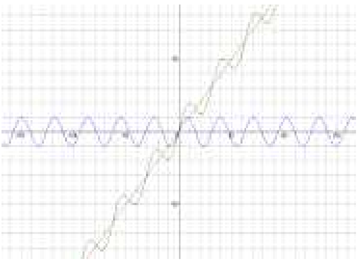
④ $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$　⑤ $y=\dfrac{1}{(x+2)^2(x+1)}$　⑥ $y=\sin^n x$

$y_1=\dfrac{1}{x^2+1}$ と $y_2=4x$ の積　$(x+2)^2(x+1)$ の逆数　$y=\dfrac{1}{\sin x}, y=\sin x, y=\sin^2 x,\cdots$ ウォリスの公式

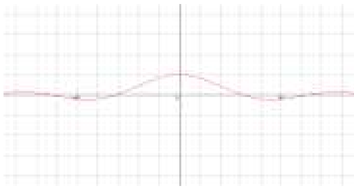
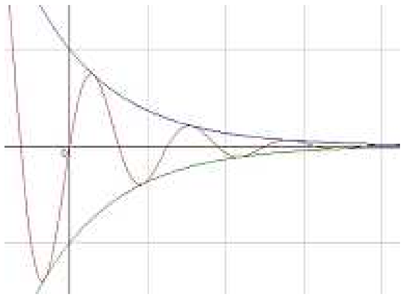




⑦ $y=x+\sin 2x$　⑧ $y=\dfrac{\sin x}{x}$　⑨ $y=e^{-x}\sin mx\quad(m=5)$

まつわり曲線　$(0,0)$ と $y=\sin x$ 上の点 $(x,\sin x)$ の傾き　**減衰曲線　等比級数**

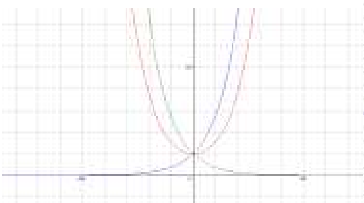
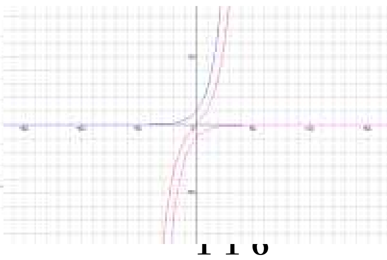


$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

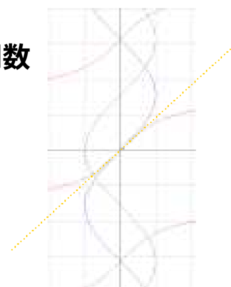



⑩ $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ **カテナリー**　⑪ $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$　⑫ $y=\arcsin x,\ y=\arccos x$

[大学]双曲線関数 $y=\cosh x$　$y=\sinh x$　$y=\arctan x$ [大学]逆三角関数微分・積分

多価関数
主値



38 滑ることなく転がる点の軌跡[超重要][☆☆☆][花プリ]　Ori.

軌跡（グラフ）の概形は初めから判っているものとして，式を求める，そして色々な量を求める

$\vec{u}=(x,y)$ を原点中心に θ だけ回転した

$\vec{u}'=(x',y')$

$\Leftrightarrow\ x'+y'i=(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\vec{u}'$

[ポイント]ベクトル的にとらえる

①$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CP}$ と考える

②滑ることなく転がる等しい長さの部分　を示す

③接点 T で垂直である．始線（x 軸の正の方向）を記入する

④$l=r\theta$（弧度）の公式を利用して角を求める

⑤始線（x 軸の正の方向）から計った角を φ として $\overrightarrow{CP}=r(\cos\varphi,\sin\varphi)$ の形，始点を原点としたベクトルで考える（φ はファイと読む）

例1 サイクロイド cy-cloid（トロコイド）

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CP}$　より

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)\\ \sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)\end{pmatrix},\ a>0$$

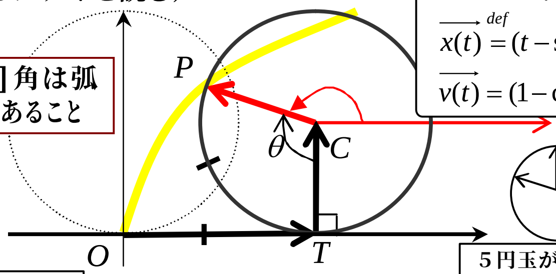
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

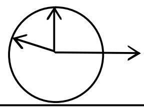
[知ッ得] x' が y である

$(0-ai)(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-a\end{pmatrix}$

[注意]角は弧度法であること





サイクロイド運動＝でんぐり返り

$\overrightarrow{x(t)}\overset{def}{=}(t-\sin t,1-\cos t)$

$\overrightarrow{v(t)}=(1-\cos t,\sin t)$

[サイクロイド的めまいの体験]
直線・円に次ぐ身近な図形．サイクロイドはマットの前転で必ず実体験せよ．一生忘れない．バクテンは放物線．

5円玉が滑ることなく転がるとき，穴は滑りながら転がっている．分かるかな？
滑りながら転がる点の軌跡も面白い

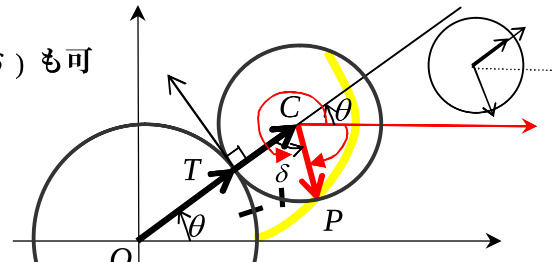
例2 カージオイド　$a\theta=b\delta$ として　$a>0,b>0$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CP}$ より

$-(\pi-\theta-\delta)$ も可

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\cos(\theta+\delta+\pi)\\ \sin(\theta+\delta+\pi)\end{pmatrix}$$

（θ はシータ，δ はデルタと読む）



半径 a の定円と半径 b の円

例3 アステロイド　$a>0$，　$a\theta=\frac{1}{4}a\delta$

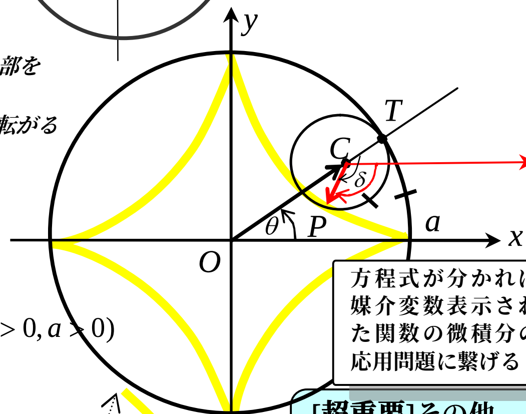
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$ より

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{3}{4}a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\frac{1}{4}a\begin{pmatrix}\cos(-3\theta)\\ \sin(-3\theta)\end{pmatrix}$$

半径 a の円の内部を
半径 $\frac{1}{4}a$ の円が転がる

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{4}a\cos\theta+\frac{1}{4}a\cos3\theta\\ y=\frac{3}{4}a\sin\theta-\frac{1}{4}a\sin3\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$$

[注意]　$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$　$(x>0,y>0,a>0)$



方程式が分かれば媒介変数表示された関数の微積分の応用問題に繋げる

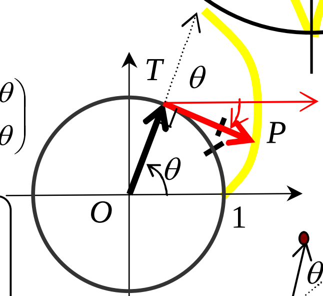
例4 インボリュート

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TP}$　$TP=$ 弧$AT=\theta$　より

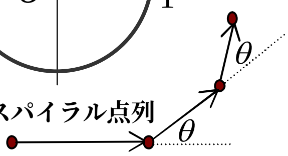
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix}\cos(\theta-\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\theta\sin\theta\\ \sin\theta-\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$(\cos\theta+i\sin\theta)\theta(-i)$ または $\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

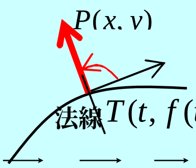
より $\overrightarrow{TP}=(\theta\sin\theta,-\theta\cos\theta)$ と求めてもよい



[類]スパイラル点列



[超重要]その他
接線や法線上に長さを設定して点 P をとる問題



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TP}$

39　位置・速度・加速度　[おまけ]さらに加加速度はジャーク（jerk,躍度）という

（１）[Def.]時刻 t における質点の位置・速度・加速度ベクトルの定義　Ori.

座標平面上を運動する質点 P の**時刻** t **における**

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in R$$

位置ベクトル　$\overrightarrow{x(t)} \overset{def}{=} (f(t), g(t))$　　$|\overrightarrow{x(t)}|$：距離

tで微分　↓↑　積分

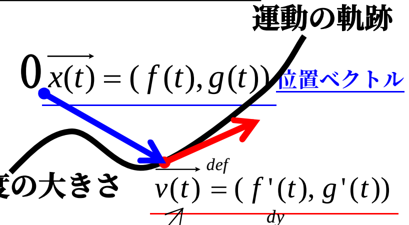
速度ベクトル　$\overrightarrow{v(t)} \overset{def}{=} (f'(t), g'(t))$　　$|\overrightarrow{v(t)}|$：速さ

tで微分　↓↑　積分

加速度ベクトル　$\overrightarrow{\alpha(t)} \overset{def}{=} (f''(t), g''(t))$　　$|\overrightarrow{\alpha(t)}|$：加速度の大きさ

道のり $\overset{def}{=} \int_{t_1}^{t_2}$ 速さ $dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$

１次元直線運動
２次元平面運動
３次元空間運動



接線方向とベクトル→　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

位置ベクトルの時間による変化率が速度ベクトル，速度ベクトルの時間により変化率が加速度ベクトル

①これらはベクトル量だからその大きさ，角度，内積　等を扱う

②$x = f(t) : y = g(t)$ から t を消去すれば運動の軌跡の方程式を得る

媒介変数表示は
動きを表す

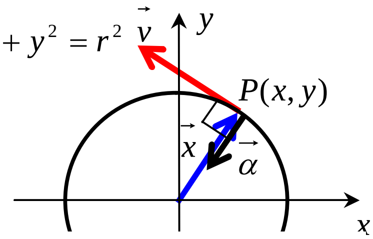
③運動方程式 $\vec{F} = m\vec{\alpha}$

$\vec{F}$ は質点が$\boxed{\text{受ける力}}$←これが力学理解の最大ポイント

$\boxed{例１}$等速円運動：座標平面上を運動する質点 P の時刻 t における位置座標を (x, y) とする

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$$

$(r > 0)$ のとき　t を消去して運動の軌跡の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$



位置ベクトル　$\overrightarrow{x(t)} \overset{def}{=} (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$　　$|\overrightarrow{x(t)}| = r$：距離

速度ベクトル　$\overrightarrow{v(t)} \overset{by\ def}{=} (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$　　$|\overrightarrow{v(t)}| = r\omega$：速さ

加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha(t)} \overset{by\ def}{=} (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t) = -r\omega^2\overrightarrow{x(t)}$　　$|\overrightarrow{\alpha(t)}| = r\omega^2$：加速度の大きさ

道のり $\overset{by\ def}{=} \int_{t_1}^{t_2}$ 速さ $dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} r\omega\,dt = 2\pi r$

内積 $\overrightarrow{x(t)} \cdot \overrightarrow{v(t)} = 0$　より　$\overrightarrow{x(t)} \perp \overrightarrow{v(t)}$

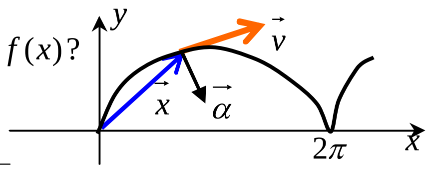
ベクトルの回転
$P\ (x, y)$ を原点中心に θ だけ回転した点が $P'\ (x', y')$
$\Leftrightarrow\ x' + y'i = (x + yi)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\boxed{例２}$サイクロイド運動

座標平面上を運動する質点 P の時刻 t における位置座標を (x, y) とすると（$\theta = \omega t$）

$$\begin{cases} x = \omega t - \sin\omega t \\ y = 1 - \cos\omega t \end{cases}$$

のとき　t を消去して運動の軌跡の方程式は $y = f(x)$?

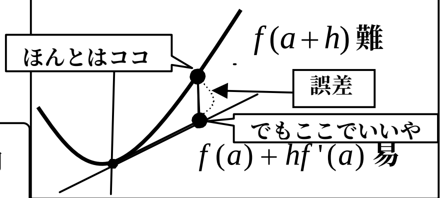


位置ベクトル $\overrightarrow{x(t)} \overset{def}{=} (\omega t - \sin\omega t, 1 - \cos\omega t)$　距離 $|\overrightarrow{x(t)}|$

速度ベクトル $\overrightarrow{v(t)} = (\omega - \omega\cos\omega t, \omega\sin\omega t)$ 速さ $|\overrightarrow{v(t)}| = \omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t}$

加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha(t)} = (\omega^2\sin\omega t, \omega^2\cos\omega t)$　加速度の大きさ $|\overrightarrow{\alpha(t)}| = \omega^2$

関数値の直線（接線）近似
h が小さいときほぼ等しいから
（重要　**微分可能なら**）



（２）一般量の変化率の問題　水の問題のポイント

水の問題など変化する量 V が時間 t の関数 $V(t)$ のとき時刻 t における

変化率は $\dfrac{dV(t)}{dt}$ で，V の増加する速さ（？）と言ったりするので注意

$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt}$ より流出速度＝水面の面積×水面の下降速度　$\dfrac{dV}{dt} = S(h) \cdot \dfrac{dh}{dt}$ 利用

流入速度＝水面の面積×水面の上昇速度

４０ 積分の定義と微積分学の基本定理・基本公式 ［大学］［参考］

（１）[Def.]連続の定義（極限で） $f(x)$ が $x = a$ で連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ 連続

（２）[Def.]微分係数･導関数の定義（極限で） $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 微分

（３）[Def.] **１変数関数の定積分の定義（リーマン和の極限で）**

f を閉区間 $[a,b]$ で定義された有界な関数とする。$[a,b]$ を有限個の区間に分割し、その分点を $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ とする。こうしてできた小区間 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ からそれぞれ任意に $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ をとり、和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ をつくる。分割の数を増し、小区間の幅 $x_k - x_{k-1}$ の最大値 $\max_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1})$ を0に収束させるとき、分割の増し方によらずにこの和が一定の値に収束するとき、f は $[a,b]$ 上で積分可能であるといい, その一定の値を f の $[a,b]$ 上での定積分といい記号では $\int_a^b f(x)dx$ と書く。

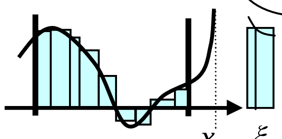
積分

① 積分区間 I=$[a,b]$ の分割⊿：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ をつくる

② 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に１点 ξ_i をとる

③ リーマン和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ をつくる

④ 分割⊿を限りなく平均に細かくしていく（極限をとる）



以上の4つの操作により、極限 $\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ を考える。この極限値Sが存在するとき

$f(x)$ のＩ上の定積分といい S=$\int_a^b f(x)dx$ とかいて、$f(x)$ はＩ上で積分可能であるという

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$n \to \infty$ のとき区画の最大幅 $\delta \to 0$ であるものとする

（４）[Th.]**有界閉区間 I=$[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ はＩ上で積分可能である。** 連続と積分

つまり、分割の仕方や $\{\xi_i\}$ の選び方によらずに定まる。有界閉区間 I=$[a,b]$ 上の単調な関数、有限個の不連続点しか持たない関数も積分可能である 不定積分

（５）[Def.]不定積分の定義（上端を x にしたもの） ［*不定積分は積分で定義された関数である*］

有界閉区間 I=$[a,b]$ 上で積分可能な関数 $f(x)$ に対して定積分 $\int_a^b f(x)dx$ において

上端 b を変数 x と考えて $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(a \le x \le b)$ を $f(x)$ の不定積分という。

（６）[Def.] $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ の定義 $G'(x) = f(x)$ $\left(\dfrac{d}{dx}G(x) = f(x)\right)$ 微分

つまり微分すると $f(x)$ になる関数 $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数という 不定積分と微分

（７）[Th.]***微積分学の基本定理*** $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ **（不定積分は原始関数の１つである）**

（８）[Th.]***微積分学の基本公式*****（定積分は原始関数で求められる）** 積分と微分

$G'(x) = f(x)$ として, $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ （＊）

<注意>上の２つの定理により連続関数に対しては、その不定積分と原始関数は一致する。

このことより, 一般に関数 f の原始関数を $\int f(x)dx$ という記号で表す。（＊）

高校では（＊）なる性質で積分を定義している。

41 積分 Table [超重要][☆☆☆☆☆]

次の表をイメージして積分の方法を暗記しよう．マップによる記憶術

Ori.

（1）積分 Table[覚え方][秘伝]

3乗は3倍角の公式も可

偶数乗は公式	奇数乗は置換		偶数乗は公式	奇数乗は置換	偶数乗は公式		n 乗は部分で漸化式へ
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\sin x$	*$\sin^2 x$	$\sin^3 x$	$\sin^4 x$	$\cdots$	$\sin^n x$
		↓			Wallis の公式		
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	⊖ $\dfrac{1}{\cos x}$	$\cos x$	*$\cos^2 x$	$\cos^3 x$	$\cos^4 x$	$\cdots$	$\cos^n x$
$\dfrac{1}{\tan^2 x}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	*$\tan x$	$\tan^2 x$	$\tan^3 x$	$\tan^4 x$	$\cdots$	$\tan^n x$ は置換で
$\dfrac{1}{(\log x)^2}$	$\dfrac{1}{\log x}$	*$\log x$	*$(\log x)^2$	$(\log x)^3$	$(\log x)^4$	$\cdots$	$(\log x)^n$

積分困難

Def $f(x)$ の原始関数 $G(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} G'(x)=f(x)$

対数は部分積分

$\log|x| \to \dfrac{1}{x}$

$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x$

微分

このxが1次式 $ax+b$ なら $=t$ と置換すると同じ方針で可能．しかし2次式 x^2 はダメ $\sin x^2$ ？

（2）超重要な *Best 6* （①～⑥）これらは丸暗記のこと．これでしっかり差がつきます

① $\displaystyle\int \log x dx=\int x'\log x dx = x\log x-\int x\frac{1}{x}dx$

Best1 $\qquad = x\log x - x + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

$\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$ は絶対に丸暗記しておかねばならない

[誤] $\displaystyle\int \log x dx = \frac{1}{x}+C$ ではない

別解 $x+1=t$ と置換すると $\displaystyle\int \log t dt$

② $\displaystyle\int \log(x+1)dx=\int (x+1)'\log(x+1)dx=(x+1)\log(x+1)-\int (x+1)\frac{1}{x+1}dx$

$=(x+1)\log(x+1)-(x+1)+C$ [ポイント] $x'\log(x+1)$ ではなく $(x+1)'\log(x+1)$ とする

③ $\displaystyle\int \sin^2 x dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+C$ ←[覚え方] sin は差が in x

④ $\displaystyle\int \cos^2 x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+C$

⑤ $\displaystyle\int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+C$

$\displaystyle\int \tan^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx=\tan x - x + C$

[知ッ得]定積分は Wallis が使える

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

[頻出] $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi a^2$, $a>0$

⑥ $\displaystyle\int (\log x)^2 dx=\int x'(\log x)^2 dx = x(\log x)^2-\int x2(\log x)\frac{1}{x}dx = x(\log x)^2-2(x\log x - x)+C$

②と同様にして $\displaystyle\int\{\log(x+1)\}^2dx=\int(x+1)'\{\log(x+1)\}^2dx$ とするのがよい（京大）

体積は πy^2 の積分や $\displaystyle\int_a^b\{\sin x-(px+q)\}^2dx$ より　③④⑤⑥の2乗の積分はよく出るのである

よって，$\displaystyle\int x\sin x dx=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C$ も暗記する

⑦ $\int \sin^3 xdx = \int (1-\cos^2 x)\sin xdx = (\cos x = t)$, $\int \cos^3 xdx = \int (1-\sin^2 x)\cos xdx = (\sin x = t)$

$\int \tan^3 xdx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin xdx = \quad (\cos x = t)$

$\int (\log x)^3 dx = \int x'(\log x)^3 dx = x(\log x)^3 - \int x3(\log x)^2 \frac{1}{x}dx =$

⑧ $\int \sin^4 xdx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$

$\int \cos^4 xdx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx = \int \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$

$\int \tan^4 xdx = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 xdx = \int \tan^2 x(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx =$

[別解] 2乗は2倍角の公式で3乗は3倍角の公式を利用し1次に次数下げする方法も有

★ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

[覚え方]3sin はダメ4sin は見事

★ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

[覚え方] 4個咲いて 3 個散る

$\int \sin^3 xdx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)dx$

$\int \cos^3 xdx = \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)dx$

⑨ $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx =$, $\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = (\sin x = t)$

$\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x| + C$, $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\log|\cos x| + C$

⑩ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$, $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

$\int \frac{1}{\tan^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 1)dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$

[重要]定積分数列

定積分で定義された数列の極限

$I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$

$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求める

典型的手順

・漸化式を作る

（定石：部分積分で）

解かずに利用する

・積分不等式で挟む

・はさみうちの原理を用いる

⑪ **積分漸化式は部分積分利用[重要]**　（$\tan^n x$ は例外で置換）

n 乗は部分で漸化式へ $\tan^n x$ は例外で置換

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'dx$

$= \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 xdx = 0 + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

これより，$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$　$(n \geq 2)$ これからWallis（ｳｫﾘｽ）の公式を得る

$\int \cos^n xdx = \int \cos^{n-1} x \cdot (\sin x)'dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int (-\sin x)\cdot(n-1)\cos^{n-2} x \cdot (\sin x)dx$ で同様

$I_n = \int (\log x)^n dx = \int x'(\log x)^n dx = x(\log x)^n - \int x\frac{1}{x}n(\log x)^{n-1}dx = x(\log x)^n - nI_{n-1}$ ←解かずに利用する

⑫ **Wallis（ウォリス）の公式[証明も重要][知ッ得]**

（ア）n が偶数のとき $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

（ｲ）n が奇数のとき $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

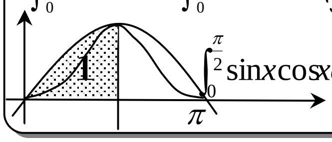
$\boxed{例}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 xdx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 xdx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

[覚え方]「2分の1，2分のπ」 $\cos^n x$ でも同様，$\int_0^{\pi} \sin^n xdx$ にも利用

[こんなの常識です]

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$



$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos xdx = \frac{1}{2}$

⑬ **積分はできないものは決してできない.応用上必要となるときは名前をつけて扱う（特殊関数）**

$\boxed{例}$ $\int \frac{1}{\log x}dx$, $\int \frac{1}{(\log x)^2}dx$（対数積分）$\int e^{-x^2}dx$（確率積分）$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$（楕円積分）$\int \sin x^2 dx$（Fresnel 積分）

連続関数の不定積分は必ず存在する。ただし、微分の場合と異なり簡単な関数でも高校で習う初等関数では表すことができない事がある。不可能なものは近似など別のテーマがある。

(3) 絶対値の定積分 [超重要][☆☆☆☆☆][コツ] Ori.

例 $\int_x^{x+1} |t-a|\sin t\,dt$ 　$-(t-a)\sin t$ 　$(t-a)\sin t$

③ ← ② ←①

[ア][イ][ウ] t

$t=a$

絶対値の定積分

$\int_1^x |\log t - a|\,dt$

③ ← ② ←①

①t軸上に
②絶対値を場合分けした関数式
③積分区間

(ア) $x+1 \le a$ 　のとき,与式$=\int_x^{x+1}\{-(t-a)\sin t\}dt=$

(イ) $x<a<x+1$ 　のとき,与式$=\int_x^a\{-(t-a)\sin t\}dt+\int_a^{x+1}(t-a)\sin t\,dt=$

(ウ) $a \le x$ 　のとき,与式$=\int_x^{x+1}(t-a)\sin t\,dt=$

手順①t軸を描く（主役はt）
手順②tの絶対値関数を区間で異なる式で表す
手順③tの積分区間を書き込む
　↑ここで必然的に場合分けが必要になる
　各場合について定積分の計算をおこなう．

難な積分を易なものに帰着する手法に置換と部分と公式変形があり．この3つのどれを用いるかは暗記するしかない．九九と同じ暗記の世界と心得よ．なお　置換積分には2タイプある　(C^1級：連続な導関数をもつ)

$t=\varphi(x)$ C^1級：難$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$ 易

$x=\varphi(t)$ C^1級：難$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 易

(4) 置換積分[☆☆☆☆] 　難→易

$f(\Delta)\Delta'$型　は$\Delta=t$と置換積分

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_a^b f(t)dt$ 　$t=\varphi(x)$ C^1級
ただし$\varphi(\alpha)=a$ $\varphi(\beta)=b$

$\int f$ が易の時有効

$\int f(u)u'=F(u)+C$ 　　$F'=f$

$f(\sin x)\cos x$型　$[\sin x=t]$
$f(\cos x)(-\sin x)$型　$[\cos x=t]$
$f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}$型　$[\tan x=t]$
$f(\log x)\dfrac{1}{x}$型　$[\log x=t]$
$f(e^x)e^x$型，$f(e^x)$型　$[e^x=t]$

$\varphi(x)=t$なる置き換えにより　積分区間，$f(x)$，dx，すべてをtで表現する　公式より　形式的に

$x|\alpha\to\beta$
$t|a\to b$

$f(\varphi(x))=f(t)$
$\varphi'(x)dx=dt$
と対応している

$\int \Delta^n\Delta'=\dfrac{1}{n+1}\Delta^{n+1}+C$ ←頻出パターン

$\int\dfrac{\Delta'}{\Delta}=\int\dfrac{1}{\Delta}\Delta'=\log|\Delta|+C$ 　*分数型はまずこの形かを疑え*

(5) 部分積分[☆☆☆☆] 　難→易

異なる関数の積は部分積分

$(uv)'=u'v+uv'$ より

$\int u'v=uv-\int uv'$ 　易の時有効

定積分では

$\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$

[秘伝]　'を付けるのは
指数→三角→整関数→対数の順に付ける 　Ori

$\int e^x\sin xdx=\int(e^x)'\sin xdx$

例 $x\sin x=x(-\cos x)'$
$xe^x=x(e^x)'$
$x\log x=(\dfrac{x^2}{2})'\log x$

[知ッ得] $(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$

積分は
部分か
置換か
公式か
で難を易に帰着これ以外にはない
また、そのための***下ごしらえ***が必要となる

部分積分に２つの流派あり
私は　uv'派　を推奨する
[覚え方]　写して　移す

①積分微分派なら　$\int x\cos xdx=$ 　　　　$=x\sin x-\int 1\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$
積分
微分

②$\int uv'$派なら$\int x\cos xdx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int 1\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$ （推奨）

そのまま写して　'を隣に移す

(6) 有理関数の積分

$\dfrac{x-1}{x(x-2)^2}$，$\dfrac{x^4-1}{(x+1)^3}$

［大原則］分数式は富士の山　まず（分子の次数＜分母の次数）に

$\dfrac{x-1}{x(x-2)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$ ←分子定数型部分分数に変形

$x+1=t$とおくとよい

(1次式)$^\alpha$の積分（易）に帰着させる

（７）三角関数の積　２乗・３乗　と同様，積→和差で１次に次数下げの方針で積分できる

$$\sin 3x\cos 2x\,,\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0$$

[大学]フーリエ級数に現れる形

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

より $\sin 5x+\sin x=2\sin 3x\cos 2x$

この両辺を積分すると

$$-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x+C=2\int\sin 3x\cos 2x\,dx$$

積→和差の公式は導き方を覚えておく

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

（８）よく似た形の積分は整理して覚える $(a>0)$ 無理関数と有理関数　$a=1:\tan^{-1}x$

① $\sqrt{x^2+a^2}$　難 $x=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

② $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　$t=x+\sqrt{x^2+a^2}$

$x=a\tan\theta\quad(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$

* ③ $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a\neq 0)$

④ $\sqrt{a^2-x^2}$　円の面積

$a=1:\sin^{-1}x$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$x=a\sin\theta\quad(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$

⑥ $\dfrac{1}{a^2-x^2}$　部分分数

①②・$x\geq 0,\ f(x)=\frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\}$ のとき，$f'(x)=\sqrt{1+x^2}$ より

暗記不要 $\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\}+C$

$\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx$　$x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

放物線の曲線の長さは意外に難しい

$y=\frac{1}{2}x^2\ (0\leq x\leq 1)$

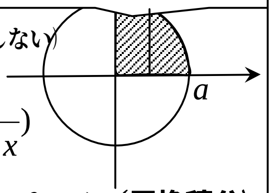
$L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$

・$x\geq 0,\ f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ のとき，$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ より

暗記不要 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\log(x+\sqrt{1+x^2})+C$

$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ \int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$ も同様

④ [超頻出] $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$ ←4分円の面積から（積分しない）



⑥ 有理関数 $\displaystyle\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{(a-x)(a+x)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ は $x=a\sin\theta\quad(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ または $x=a\cos\theta\quad(0<\theta<\pi)$（置換積分）

② $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ③有理関数 $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ は $x=a\tan\theta\quad(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$（置換積分）

[知ッ得]

$\displaystyle\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx$

$\tan\frac{x}{2}=t$ のとき

$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

を利用,有理関数に

・置換積分の公式 $x=\varphi(\theta):\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)\,d\theta$　難→易　の形での応用　(4)と比較せよ

[大学] $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\,(a>0),\ \int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C\,(a\neq 0)$

[頻出][知っ得][大学]逆三角関数の微分公式からも得る　$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C=\theta+C\ (x=\sin\theta)$

$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C=\theta+C\ (x=\tan\theta)$

（９）

$$(x-\alpha)(x-\beta),(x-\alpha)^2(x-\beta),x\sqrt{x+1},\ \frac{x}{\sqrt{1-x}},\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$$

・固まりの積分 $\displaystyle\int(x-\alpha)^n dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C,\ \int(ax+b)^n dx=\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\frac{1}{a}+C$ の形に帰着させる

◇方法１　部分積分を使う $\displaystyle\int(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=$　（１次式）$^\alpha$ の積分（易）に帰着させる

$$\int\left(\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right)'(x-\beta)dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x-\beta)-\int\frac{1}{3}(x-\alpha)^3dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x-\beta)-\frac{1}{12}(x-\alpha)^4+C$$

◇方法２　変形では $\displaystyle\int(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int(x-\alpha)^2(x-\alpha+\alpha-\beta)dx=\int\{(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\}dx$

$=\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^3+C$　◇方法３　$\sqrt{1-x}=t$ または $1-x=t$ と置換積分で行う方法も

４２ （接線）・面積・体積・曲線の長さ ［覚え方］

丸暗記でなく意味を考え式をたてよう（分けて積む）積分区間は左から右（下から上）←重要

Ori.

（１） $y=f(x)$， $f(x,y)=0$ で与えられた曲線

手順１図　まず，求める部分を図で示す

接線　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

手順２式　・面積 $S=\int_a^b$ 長さ・幅

縦・横方向を問題に応じて使い分ける

$S=\int_{左}^{右}(上-下)dx$ か $S=\int_{下}^{上}(右-左)dy$ かを考える

$dS=f(x)dx$
$dV=S(x)dx$
$dV=2\pi x\{f(x)-g(x)\}dx$
$dL=\sqrt{dx^2+dy^2}$　線素

・体積 $V=\int_a^b$ 断面積・幅　$(a<b, c<d)$ として

非回転体 $V=\int_a^b S(x)dx$

断面積 $S(x)$ さえ分かれば体積は求まるから立体の形は気にしなくてもよい

［重要］［知ッ得］うまい手あり
$y=f(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx$
と変数の置換をする方法有り
$\int_c^d \pi x^2dy=\int_e^f \pi x^2 f'(x)dx$
↑難のとき　　↑易

回転体 $V_x=\int_a^b \pi y^2dx$， $V_y=\int_c^d \pi x^2dy=\int_e^f \pi x^2\dfrac{dy}{dx}dx$

くり抜き有 $V=\pi\int_a^b\{f(x)-g(x)\}^2dx$ ［誤］ $V=\int_a^b\pi\{f(x)\}^2dx-\int_a^b\pi\{g(x)\}^2dx$ ［正］

・曲線の長さ $L=\int_a^b$ 線素　$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

［知ッ得］バウムクーヘン積分
$dV=2\pi x\{f(x)-g(x)\}dx$
$\therefore V=\int_a^b 2\pi x\{f(x)-g(x)\}dx$

手順３計算　は合理的に（$x\leftrightarrow y$ の置換積分で行うものも重要）

弧長の計算はルートがはずれる場合が多い

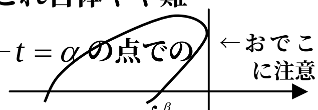
［質問］なぜ表面積は扱わないのですか［答え］大学の内容です

放物線の曲線の長さは難（楕円は超難）
$y=\dfrac{1}{2}x^2\ (0\le x\le 1)$ のとき
$L=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=$（難）

（２） $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ と媒介変数表示で与えられた曲線

手順１図　まず，求める部分を図で示す←これ自体やや難

・接線 $l: y-g(\alpha)=\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}(x-f(\alpha))$ ←$t=\alpha$ の点での



←おでこに注意

$y=F(x)=F(f(t))=g(t)$　$\int_a^b F(x)dx=\int_\alpha^\beta F(f(t))f'(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt=$

手順２式　・面積 $S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta y\dfrac{dx}{dt}dt=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$　$(y\ge 0)$

・体積 $V=\int_a^b\pi y^2dx=\int_\alpha^\beta \pi y^2\dfrac{dx}{dt}dt=\int_\alpha^\beta\pi\{g(t)\}^2f'(t)dt=$

・曲線の長さ $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

手順３計算　は合理的に（Wallis の公式も上手く使う）

体積の様々なバリエーション
①回転軸と回転されるものが交わる．$y<0$ の部分を x 軸に関し折り返すタイプ。くり抜きは公式化しない．
②空間の不等式で与えられる非回転体の体積　$(z=t)$
③空間座標で立体を与えて体積を考えるタイプ　非回転体
④線分の回転→断面積の積分
⑤ $y=x$ の周りの斜軸回転
$V_{y=x}=\int_a^b\pi\{x-f(x)\}^2\cos\theta dx$
⑥パップス･ギュルダンの定理
［知ッ得］ $V=lS$ ：l は重心が１回転した長さ、S は面積

（３）極方程式 $r=f(\theta)$ を媒介変数表示 $\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$ にして

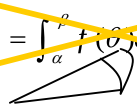
接線・面積・体積・曲線の長さの公式を適用

［知ッ得］・面積 $dS=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$　$S=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}r^2d\theta=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}\{f(\theta)\}^2d\theta$

逆に媒介変数表示された曲線で $\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$ の形のものは

極方程式 $r=f(\theta)$ と同じことなので上の公式で面積を求めてもよい

［大学］極方程式と曲線の長さ
$dL=rd\theta$ より
$\cancel{L=\int_\alpha^\beta f(\theta)d\theta}$（誤）

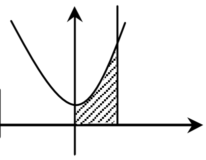


$dL=\sqrt{(rd\theta)^2+(dr)^2}$
$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$（正）

例 代表的な関数の接線・面積・体積・曲線の長さ Ori.

(1) $y=f(x)$ **型**　**例** $y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$　$(a>0)$ **カテナリー（懸垂線（けんすいせん））**

$a=1$ のとき $S=\int_0^p ydx=\int_0^p \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^p=\frac{1}{2}(e^p-e^{-p})$



$V=\int_0^p \pi y^2dx=\int_0^p \pi\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\}^2dx=$　　$L=S$ はカテナリーの重要性質

$L=\int_0^p\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^p\sqrt{1+\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\}^2}\,dx=\int_0^p\sqrt{\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\}^2}\,dx=\int_0^p\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx=S$

[大学]双曲線関数　$\cosh x\overset{def}{=}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$（ハイパボリックコサイン）　$\sinh x\overset{def}{=}\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$（ハイパボリックサイン）のとき　(2式はペアーで)

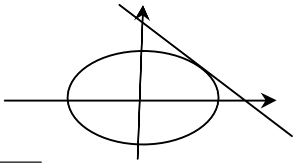
$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$（←マイナス）　$(\sinh x)'=\cosh x$　$(\cosh x)'=\sinh x$（←プラス）などが成立(公式)

$f(x,y)=0$ **型**　**例** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$　**楕円**←パラメーター表示でも可

接線 l　$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$　，$\dfrac{dy}{dx}$ は陰関数の微分法で

球の体積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ は暗記の事
[覚え方]　身の上に心配ありて参上

$S=4\int_0^a ydx=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\frac{b}{a}\times\frac{1}{4}\pi a^2=\pi ab$



$V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$

$L=4\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=?$　$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\,d\theta=?$ 楕円積分[難・大学]

(2) $\begin{cases}x=f(\theta)\\y=g(\theta)\end{cases}$ **型**　**例** $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ $(a>0)$ **サイクロイド**

面積・体積・曲線の長さすべて求まる万能曲線
カテナリー
サイクロイド

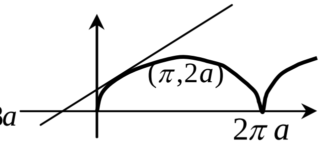
$\theta=\alpha$ の時の接線 l : $y-a(1-\cos\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}(x-a(\alpha-\sin\alpha))$ ← $y-g(\alpha)=\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}(x-f(\alpha))$

$S=\int_0^{2\pi a}ydx=\int_0^{2\pi}y\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)d\theta=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta=\cdots=3\pi a^2$

$V=\int_0^{2\pi a}\pi y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta=\pi\int_0^{2\pi}\{a(1-\cos\theta)\}^2\cdot a(1-\cos\theta)d\theta=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3d\theta=$

$L=\int_0^{2\pi a}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$

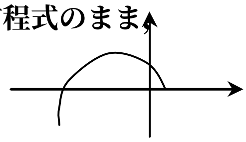
$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$



(3) $r=f(\theta)$ **型** $\Leftrightarrow\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$　**例** $r=\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=\theta\cos\theta\\y=\theta\sin\theta\end{cases}$ **アルキメデスの螺旋（らせん）**

接線, S，V,L ：パラメーター表示に直して公式を適用する　なお極方程式のまま

[大学] $S=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\theta^2d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\pi}=\frac{1}{6}\pi^3$　としてもよい



４３　関数方程式 ［花プリ］ 0ri.

未知のものが関数である。何らかの関係（微分，積分，など）からこれを満たす関数を求めることを関数方程式を解くという（参）数方程式　行列方程式　数列方程式は漸化式
$f(x)$ は連続関数として（積分可能な条件）

（１）関数方程式

例　$\forall x, y \in R;\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$

① 微分可能性が付加されているもの→１つの文字に関し微分することも可

② 付加されていないもの→定義による微分から　$f'(x) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

（２）微分方程式 は変数と，関数および導関数を含む方程式である。決まった形について解き方が得られているに過ぎない

① 整関数で次数をまず決定するもの

最高次の項を $ax^n\ (a \neq 0)$ とする

新課程　$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とおく

［コツ］$\dfrac{dy}{dx}, \int\ dx$ とひとまとめとせず に dx, dy を主役に $dx, dy, \int$ を単体で使えるように心掛ける事　ライプニッツ

② 変数分離形 $f(y)dy = g(x)dx$ の形へ

例 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y}{x(1+x)}$　，$x = 1$ のとき $y = 1$ ←初期条件という

一般解：積分定数を含んだまま，**特殊解**：積分定数を特定の値にしたもの

③ 同次形

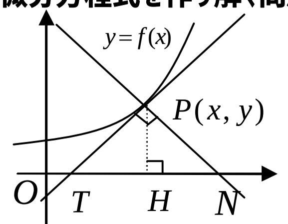
④ おきかえ　例 $x > 0$，$x(x^2 + 3y^2)y' = y^3$，$x = 1$ のとき $y = 1$

⑤ 連立　例 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$　$t = 0$ のとき，$x = 1$，$y = 1$

$v = \dfrac{y}{x}$ とおく

⑥ 応用（図形・直交曲線群，位置・速度・加速度，**水の問題**）

微分方程式を作り解く問題



図形の接線影・法線影

①接線影 $TH = \left|\dfrac{y}{y'}\right|$

②法線影 $HN = |yy'|$

③接線の長さ

$PT = \left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right|$

④法線の長さ

$PN = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|$

（３）積分方程式のパターン分類 ［超重要］［☆☆☆☆☆］ 0ri.

Ⅰ．定数型（文系も出題される）　a, b は定数とする

$\int_a^b f(t)dt$ 型　　t のみの式である事　$= k$ とおく

$\int_a^b (x - t) f(t)dt$ 型　［まず］x を $\int$ の外へ出し定数 k，h とおく

Ⅱ．x の関数型（文系は①のみ）

① 文　$\int_a^x f(t)dt$ 型　　x を含まない事

微積分の基本定理
公式 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

② $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ 型　$\dfrac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$　準公式

証 $\dfrac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \dfrac{d}{dx}\left(\int_a^{v(x)} f(t)dt - \int_a^{u(x)} f(t)dt\right)$ に合成の微分公式

③ 理 $\int_a^x (x - t) f(t)dt$ 型［☆☆☆］［まず］x を $\int$ の外に出してから積の微分

④ $\int_a^x xf(x - t)dt$ 型　　$x - t = u$ とおき置換積分で③型に

$\dfrac{dx}{dt} = k,\ x = kt + C\ (k > 0)$
微分方程式の１番単純なモデルは人口増加、細胞分裂など変化の仕方が現在量に比例するものである
$\dfrac{dx}{dt} = kx, (k > 0)$，$x = Ce^{kt}$
$\dfrac{dx}{dt} = k(A - x)x, (k > 0)$
はロジスティック方程式といい
$x = \dfrac{A}{1 + Ce^{-\alpha At}}$

関数･積分方程式→（帰着）→微分方程式→結局積分に帰着される

＜応用例＞$r = f(\theta)$（$0 < \theta < t$）の曲線の長さが $\sqrt{2}\{f(t) - 1\}$ なるとき $f(\theta)$ を求めよ。

方針 $r = f(\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$　より $\int_0^t \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \sqrt{2}\{f(t) - 1\}$ を解く

関数方程式　完全にパターン分類される分野です．パターンを知れば完璧．

例（1）**関数方程式**　→微分方程式に帰着　$f(x)$ は連続関数として

多くの関数方程式は，微分可能である事が何らかの形で導入されていれば微分方程式として解かれる

①　$\forall x, y;\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$，　$f'(0) = 1$，**微分可能**

x を固定して y で微分することもできる

②　$\forall x, y;\ f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y) + \sin x \sin y$，　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0$

微分の定義を使う $\displaystyle f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ および $\displaystyle f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

（2）**微分方程式**

①　すべての x に対し，等式 $xf'(x) = f(x)$ を満たす整関数 $f(x)$ をすべて求めよ．

最高次の項を $ax^n\ (a \neq 0)$ とし，まず次数を決定する

②　変数分離形　例 $\dfrac{dy}{dx} = \alpha(A-y)y$　はロジスティック方程式といい[超重要]である

（3）**積分方程式**　Ⅰ．定数型　$f(x) = x + \int_0^1 (t-x)f(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

$f(x) = x + \int_0^1 tf(t)dt - x\int_0^1 f(t)dt$，　$\int_0^1 tf(t)dt = A$，$\int_0^1 f(t)dt = B$ とおく

Ⅱ．x の関数型

$\int_a^x f(t)dt$，$\int_a^{g(x)} f(t)dt$，$\int_a^b f(x,t)dt$ などは x を変数とする関数を定める。

①　$\int_a^x f(t)dt = e^x - e$　，　$f(x)$ と定数 a を求めよ．

両辺を x で微分すると $f(x) = e^x$　恒等式だから $x = a$ を代入すると $0 = e^a - e$ $\therefore a = 1$

②　$f(x) = \int_{2x}^{x+1} e^{t^3-t}dt$　を微分せよ．　$f'(x) = e^{(x+1)^3-(x+1)} - 2e^{8x^3-2x}$

$f_n(x) = \int f(n,x)dx$ など関数列　また $I_n = \int_a^b f(n,t)dt$ など定積分で定義される数列の極限、級数の収束発散問題も重要

$\int_0^{2x} f(t)dt = x\sin x + C$　を満たす連続関数 $f(x)$ と定数 C を求めよ．

x で微分すると $f(2x)\cdot 2 = \sin x + x\cos x$ $\therefore f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)$

$x = 0$ を代入して $\int_0^0 f(t)dt = C$ $\therefore C = 0$

理 ③　すべての x に対し $\int_0^x (x-t)f(t)dt = \sin x - x$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

まず変形して $x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \sin x - x$　　[知ツ得] $\int_0^x (x-t)f(t)dt$ は $f(x)$ の2回積分

x で微分すると $\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \cos x - 1$ さらに x で微分して $f(x) = -\sin x$

条件の連続関数で積分が定義され微積分学の基本定理より $\int_a^x f(t)dt$ は微分可能である

理 ④　$f(x) = (x^2+1)e^{-x} + \int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

$\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ について　$x - t = u$ とおくと　$-dt = du$

t	$0 \to x$
u	$x \to 0$

$\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt = \int_x^0 f(u)e^{u-x}(-du) = \int_0^x f(u)e^{u-x}du = \int_0^x f(t)e^{-(x-t)}dt = e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$

ゆえに $f(x) = (x^2+1)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$　　さらに両辺を x で微分し　連立させて

$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2+1)(-e^{-x}) - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt + e^{-x}f(x)e^x = 2xe^{-x} - f(x) + f(x)$　となる

$\therefore f(x) = \int 2xe^{-x}dx = -2(x+1)e^{-x} + C$，　$f(0) = 1$ から $C = 3$，　$f(x) = -2(x+1)e^{-x} + 3$