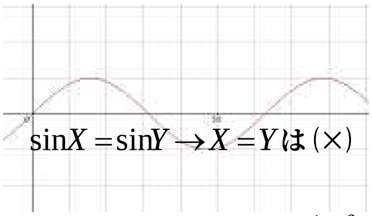
V　解析学（文理共通）

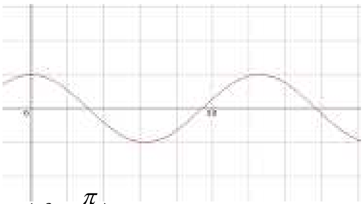
[大原則]　方程式・不等式は関数のグラフの形状に帰着する[超重要]

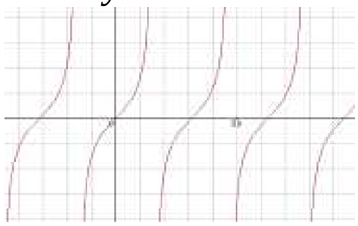
難　→　易

■ちがいに着目　三角関数は周期関数　・　3次関数は点対称　・　指数対数関数は1対1単調

$y=\sin x$　　　$y = \cos\ x$　　　$y = \tan x$

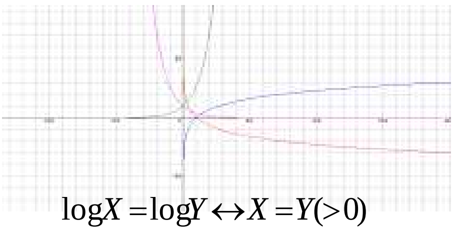


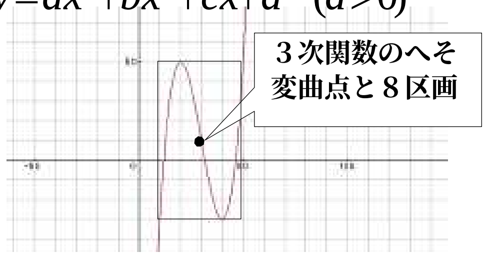




$y = \sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$y = a^x$　　$y = \log\ x$　　　$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a>0)$





＜角の単位　ラジアン＞についていろいろな言い方はあるが　**円関数**の概念を持ち込むのが一番明快である。
■ $\sin x, \cos x, \tan x$ を図形的なものから切り離して普通の実数を変数とする関数として考えるには x を角度ではなく、長さとして考えればよい■これが半径角（ラジアン角）で　180°はπ（半径）となる　ラジアンとはラテン語の半径のことである■微分積分を意識したときの角は絶対にラジアン角でなければならない。がこのときのxは実数で無名数といい単位を付けずに呼ぶ■度という角の表し方は長さの表示ではないので数直線上に目盛ることができない.三角関数のグラフを描く時はどうしてもラジアンという角の大きさを使う必要がある。でないと $y = x$ などのグラフと同一座標平面上に描けません。

■階差数列をとることを<u>差分する</u>という，それを集めることを<u>和分</u>という，差分･和分は微分･積分に対応する操作

[Def]　数列$\{a_n\}$が与えられているとき、$b_n = a_{n+1} - a_n$　，$c_n = b_{n+1} - b_n$ を項とする数列

$\{b_n\}\ \{c_n\}$を数列$\{a_n\}$の**第1階差数列,第2階差数列**という。

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$$
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
\{a_n\}: & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \\
\{b_n\}: & & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\
\{c_n\}: & & & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots & c_{n-1} & c_n
\end{array}$$

差分　$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$

和分　$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = a_n - a_1$　と書くことも

第1第2階差数列が等差数列と等比数列である数列

（ i ）$\{b_n\}$が公差$\neq 0$の等差数列であるとき

$$a_n = pn^2 + qn + r \quad (p \neq 0)$$

（ii）$\{c_n\}$が公差$\neq 0$の等差数列であるとき

$$a_n = pn^3 + qn^2 + rn + s \quad (p \neq 0)$$

（iii）$\{b_n\}$が公比$\neq 1$の等比数列であるとき

$$a_n = pr^{n-1} + q$$

（iv）$\{c_n\}$が公比$\neq 1$の等比数列であるとき

$$a_n = pr^{n-1} + qn + r$$

２５　２次関数

半分の２乗の加減

同じものを足して引くのは数学の各分野で見られる変形手法 [湯加減･手加減･塩加減]

(類) $x \div \frac{b}{a} = x \div \frac{b}{a} \times \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = x \times \frac{a}{b}$ (分数の割り算は逆数をかける)

（1）２次関数

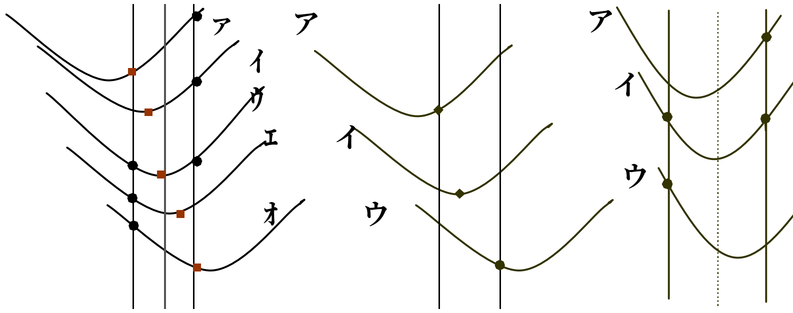
一般形から標準形へ $y = ax^2 + bx + c = a\{x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$(a \neq 0)$ $(a, b, c \in R)$

$y' = 2ax + b \quad (a \neq 0) \quad y' = 0$ より $x = -\frac{b}{2a}$

① 頂点→標準形 $y = a(x-p)^2 + q$ 　([知ッ得]微分を利用すると軸は楽に求まる)

② 区間における最大・最小[図をかくコツ]→区間とその中心と軸の位置で場合分けする　0ri.



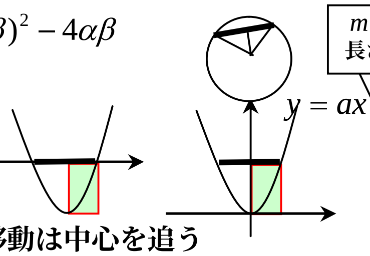
[コツ] 区間を固定して放物線を動かす図 (左図は最大･最小とも考えたとき) (中右図は最小および最大だけ考えたとき 別々に考えるのが判り易い)
区間を動かす場合もある
[重要] 2変数関数･絶対値関数
$z = f(x, y)$ の最大･最小値問題は
ノミネート方式(予選決勝方式)が有効

③ 切り取る弦の長さ[必出]→ x 軸との交点 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ として $|\alpha - \beta|$ [類]円の弦の長さはピタゴラスで

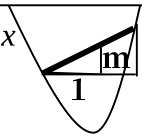
ｉ）$\alpha, \beta \in R$ 　より　$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

ⅱ）$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$ 　が意外に簡単です

ⅲ）[裏技]　$y = ax^2$ と合同であることを利用する



m を傾きとして弦の長さは $\sqrt{1 + m^2}$ 横幅



④ 平行移動は $y - q = f(x - p)$ で全体を追う

[コツ]ただし，放物線の移動は頂点を追う．円の移動は中心を追う

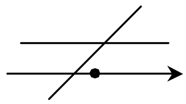
⑤ 接線２次のときは判別式が使える，円なら $d = r$，公式，微分　なども　円と放物線に D=0 は危険

（ア）交わる $\Leftrightarrow D > 0$ 　，（イ）接する $\Leftrightarrow D = 0$ 　，（ウ）離れる $\Leftrightarrow D < 0$

（2）１次不等式・２次不等式　→　グラフで考える

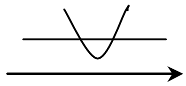
① 1次不等式　$ax > b, (a \neq 0)$ 　は　$a > 0$ のとき; $x > \frac{b}{a}$ 　$a < 0$ のとき, $x < \frac{b}{a}$

② $\forall x \geq 0; ax + b > 0 \Leftrightarrow$



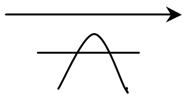
$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 　[センター]

③ $\forall x; ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$



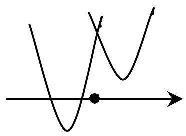
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$

④ $\exists x; ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$



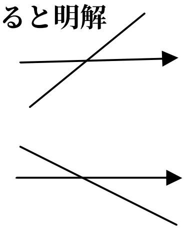
でない $\Leftrightarrow$ （ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$ ）でない

⑤ $\forall x > 0; ax^2 + bx + c > 0 \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 軸 \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} a > 0 \\ 軸 \geq 0 \\ D < 0 \end{cases}$

$ax > b$
文字係数の１次不等式も直線のグラフに帰着すると明解



（3）方程式・不等式は関数に帰着

[難]三角･指数･対数･分数の方程式や不等式は置き換えで

[易]２次の方程式･不等式に帰着（変域に注意）

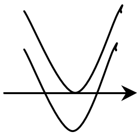
[より易]２次関数のグラフの形状
$\Leftrightarrow \begin{cases} 判別式 \\ 軸の位置 \\ 端点での符号 \end{cases}$ 　（必要十分）

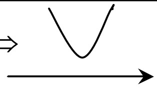
（4） ２次方程式の解の分離(配置・存在範囲の)問題[☆☆☆]

[超重要][☆☆☆]グラフ（２次関数）の形状に帰着する

[比較]虚数解も考えた複素数平面上での解の分離問題
「共役ペアは実軸対称」
「ガウス平面上の３点幾何の話題へ」

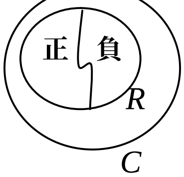
例 $y=f(x)=x^2+ax+b=0$ の２解 $\alpha,\beta\ (\in C)$ について
↑前提条件

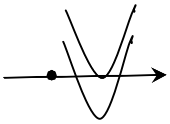
① 実解 $\Leftrightarrow \alpha,\beta\in R \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow D\geq 0$

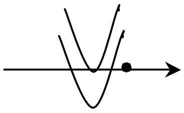
② 実解をもたない $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow D<0$

③ ２解とも正 $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}D\geq 0\\ \alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\end{cases}$

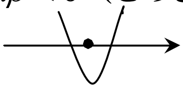
④ ２解とも負 $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha<0\\ \beta<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}D\geq 0\\ \alpha+\beta<0\\ \alpha\beta>0\end{cases}$



$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases}D\geq 0\\ 軸>0\\ f(0)>0\end{cases}$

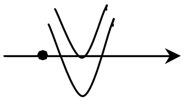
$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases}D\geq 0\\ 軸<0\\ f(0)>0\end{cases}$

⑤ ２解が異符号 $\Leftrightarrow \alpha\beta<0$ （このとき $D>0$ は保証）

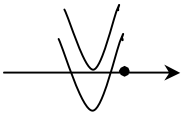
$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow f(0)<0$

⑥ ２解とも１より大 $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>1\\ \beta>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-1>0\\ \beta-1>0\end{cases} \Leftrightarrow$ ア $\begin{cases}D\geq 0\\ (\alpha-1)+(\beta-1)>0\\ (\alpha-1)(\beta-1)>0\end{cases}$

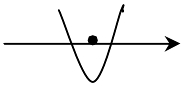
$\begin{cases}\alpha>1\\ \beta>1\end{cases} \Rightarrow$ エ $\begin{cases}D\geq 0\\ \alpha+\beta>2\\ \alpha\beta>1\end{cases}$
（必要条件）

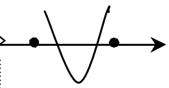
$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$ イ $\begin{cases}D\geq 0\\ 軸>1\\ f(1)>0\end{cases}$ （推奨）

ウ $\Leftrightarrow 1<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ （やや難）
無理不等式→グラフ，同値変形

⑦ ２解とも１より小 $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases}D\geq 0\\ 軸<1\\ f(1)>0\end{cases}$ （推奨）

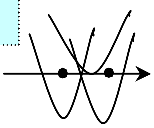
２次方程式･不等式の解の存在範囲の問題はグラフがその様になる必要十分な条件を
イ $\begin{cases}判別式\\ 軸の位置\\ 端点での符号\end{cases}$ で表現

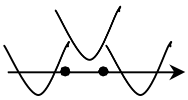
⑧ $\alpha<1<\beta$ $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow f(1)<0$

⑨ －１と１の間に異なる２解 $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases}D>0\\ -1<軸<1\\ f(-1)>0\\ f(1)>0\end{cases}$

[応用] $|x|\geq 1$ に少なくとも1解もつ
$\Leftrightarrow D\geq 0$ から２解とも $|x|<1$ を除く

[知ッ得]文字定数が１次の解の分離は定数分離法が有効
$x^2-1=a(x+2)$
$\dfrac{x^2-1}{x+2}=a$ [数III]

⑩ １と２の間に１解をもつ $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow f(1)f(2)<0$ or $\begin{cases}1<軸<2\\ D=0\end{cases}$

⑪ １と２の間で常に $f(x)>0$ $\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases}軸<1\\ f(1)>0\end{cases}$ or $\begin{cases}1\leq 軸\leq 2\\ D<0\end{cases}$ or $\begin{cases}2<軸\\ f(2)>0\end{cases}$

[類題] ２解とも整数 [コツ] 判別式と解と係数の関係から考える→不定方程式の整数解問題

$x^2+(a+6)x+a-2=0$ の２解が整数となる a の値は整数解 $\alpha,\beta\in I$ として

$\begin{cases}\alpha+\beta=-a-6\\ \alpha\beta=a-2\end{cases}$ より $\alpha\beta+\alpha+\beta=-8$ $(\alpha+1)(\beta+1)=-7$ $\alpha+1,\beta+1\in I$ より

$(\alpha+1,\beta+1)=(1,-7),(-1,7),(7,-1),(-7,1)$ $\therefore$ $(\alpha,\beta)=(0,-8),(-2,6),(6,-2),(-8,0)$

$\therefore a=2,-10$

26　3次関数と整関数の微分法 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ より $dy=f'(x)dx$ よって $f'(x)$ を微分係数という

(1) [Def.] 2つの傾き　①平均変化率　②微分係数・変化率の定義

[コツ] ′（ダッシュ）を傾きと読むとイメージしやすいよ

① 平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ← 2点間の傾き　1点での傾き [違いを確認]

② 微分係数 $f'(a)\overset{def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ （存在するとは限らない）

[表現いろいろ] 1点での傾き, 微分係数, 変化率, $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, 導関数は類似の概念（微妙に違う）

[Def.] 導関数の定義 $f'(x)\overset{def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ この形で覚えておく [重要] [☆☆]

$f(x)=x^n\ (n\in N)$ のとき $f'(x)\overset{by\ def}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}({}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_nh^n)=nx^{n-1}$

(2) 接線 2次のときは判別式が使える，円なら $d=r$，公式，微分など

[知ッ得]
$\{(ax+b)^n\}'$
$=an(ax+b)^{n-1}$

① 交わる $\Leftrightarrow D>0$　，接する $\Leftrightarrow D=0$　，離れる $\Leftrightarrow D<0$

② 3つの接線

ア.上の点　　イ.傾き m　　ウ.点を通る（点から引いた）

$(a, f(a))$ における接線　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$　（公式）

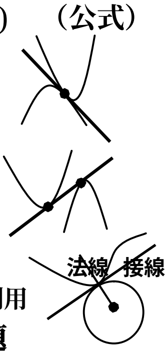
接線といえば
接点を押さえる

③ 共通接線の問題

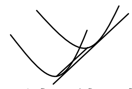
i　$x=a$ で共通接線をもつ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$

ii　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線の問題の $\boxed{\text{方針}}$

ア）一方の接線が他方に接するようにする
イ）各々の接線を求め，それが一致するようにする
ウ）$y=mx+n$ とおき接する条件（2次なら $D=0$）利用



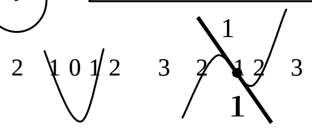
[知ッ得] [裏技]
x^2 の係数が等しいとき



頂点を結ぶ直線と共通接線は平行となる

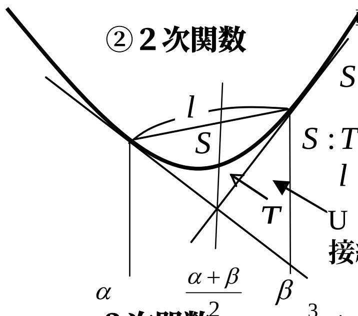
④ 引ける接線の本数の問題　[予想]円との共通接線問題

[知ッ得] $y=f(x)$ の $\boxed{\text{グラフ}}$ と $\boxed{\text{漸近線}}$ と $\boxed{\text{変曲点における接線}}$ が場合分けの境界となる



(3) 整関数のグラフの性質 [知ッ得] ①1次関数　略

②2次関数



$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

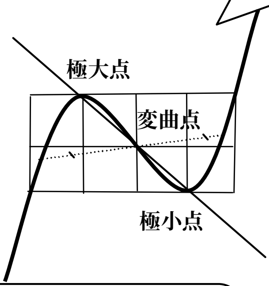
$S:T=2:1\quad S:U=1:2$

l：解と係数の関係を利用

接線の交点は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

③3次関数

[知ッ得] この合同8区画内にグラフは収まる



変曲点に関し点対称

極大点と極小点の中点が変曲点より

極値の和 $=2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

変曲点は $y''=0$ より

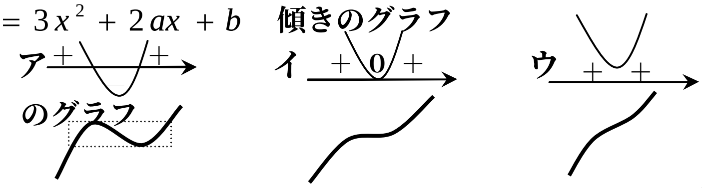
3次関数のヘソ　変曲点

3次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$

$y'=3x^2+2ax+b$　傾きのグラフ

ア　イ　ウ

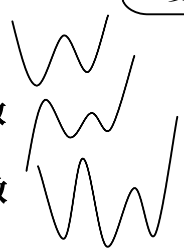
y のグラフ



④4次関数

⑤5次関数

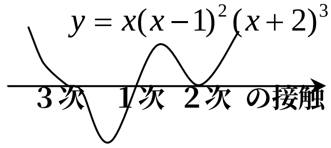
⑥6次関数



[裏技] 3次関数の極値の差（極大値−極小値）の計算は

$f(\beta)-f(\alpha)=\int_\alpha^\beta f'(x)dx=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

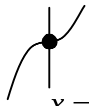
$y=x(x-1)^2(x+2)^3$



（４）３次関数の極値の分離問題[☆☆☆]→ y' （２次関数）のグラフに帰着 Ori.

$f(x)$ は整関数とするとき（前提条件）一般には　微分可能な関数

$x=a$ で極値をもつ $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $f'(a)=0$ （必要条件であって十分条件ではない）



反例　$x=a$

$x=a$ で極値をもつ $\Leftrightarrow$ $x=a$ の前後で $f'(x)$ が符号変化する

必要十分

$x=a$ で極大値をもつ $\Leftrightarrow$ $x=a$ の前後で $f'(x)$ が正から負へ符号変化する

$x=a$ で極大値をもつ $\Leftarrow f'(a)=0 \wedge f''(a)<0$ 十分条件

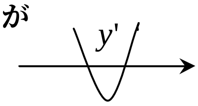
[注意]　$f(x)=x^3-\frac{1}{2}a^2x^2+2ax$ が $x=1$ で極小値をもつ a を求めよ　$f'(1)=0$ から不適なものがでる

例　$y=x^3+ax^2+bx+c$ の極値の分離問題

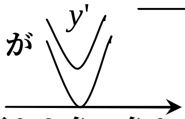
$y'=3x^2+2ax+b$ のグラフに帰着（→解の分離問題）

① 極値をもつ $\Leftrightarrow$ y' が符号変化する　つまり　y' のグラフ（２次関数）が

$\Leftrightarrow D/4=a^2-3b>0$



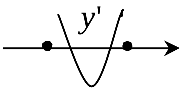
② 単調増加 $\Leftrightarrow \forall x;\ y'\geq 0$　つまり　y' のグラフ（２次関数）が

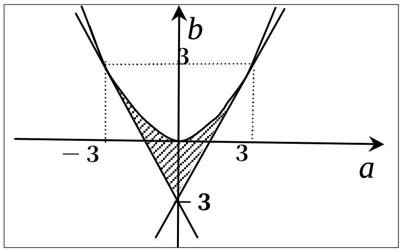


$\Leftrightarrow D/4=a^2-3b\leq 0$

③ -1 と 1 の間に極大値と極小値をもつ $\Leftrightarrow$ y' が $-1<x<1$ で正から負，負から正へ符号変化する

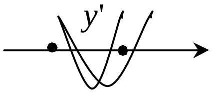
極値の分離問題
キーワードは
y' のグラフ

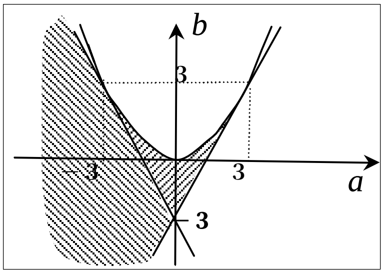
$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} D/4=a^2-3b>0 \\ -1<\text{軸}<1 \quad \therefore -1<-\dfrac{a}{3}<1 \\ f'(-1)=3-2a+b>0 \\ f'(1)=3+2a+b>0 \end{cases}$$



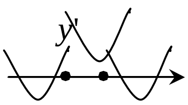
④ $-1<x<1$ で極大値をもつ $\Leftrightarrow$ y' の符号が $-1<x<1$ で正から負へ変化する

y' のグラフが

$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} D/4=a^2-3b>0 \\ -1<\dfrac{-a}{3}<1 \\ f'(-1)=3-2a+b>0 \\ f'(1)=3+2a+b>0 \end{cases}$$
or
$$\begin{cases} f'(-1)=3-2a+b>0 \\ f'(1)=3+2a+b\leq 0 \end{cases}$$



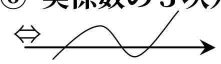
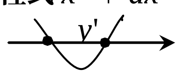
⑤ １と２の間で単調増加 $\Leftrightarrow$ １と２の間で常に $f'(x)\geq 0$ $\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{軸}\leq 1 \\ f'(1)\geq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} 1<\text{軸}<2 \\ D\leq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} 2\leq \text{軸} \\ f'(2)\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{3}\leq 1 \\ f'(1)=3+2a+b\geq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} 1<-\dfrac{a}{3}<2 \\ D/4=a^2-3b\leq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} 2\leq -\dfrac{a}{3} \\ f'(2)=12+4a+b\geq 0 \end{cases}$

⑥ 実係数の３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる３実数解をもつ

$\Leftrightarrow$   $\Leftrightarrow$ $f'(\alpha)=f'(\beta)=0 \wedge f(\alpha)f(\beta)<0$

[あのね]「微分とは微かに分かること,積分とは分かった積もり！」

（微分とは微細な部分，積分とは分けて積むこと）（微分とは平均変化率の極限、積分はリーマン和の極限）

２７ 複素数解の分離問題（解の存在範囲）0ri.[複素数平面は旧課程]

（1）複素数平面上での虚数解も考えた解の分離問題[重要]　「整方程式の解は根という」

① [Th.]代数学の基本定理「*複素数係数*の n 次の整方程式は複素数の範囲に n 個の解をもつ」

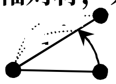
C　$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=0$　解と係数の関係 (2 次·3 次は特に重要) が成り立つ

② *実係数*の整方程式

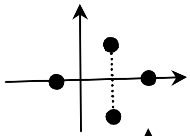
R

1．[重要]実係数の整方程式が虚数解を解にもつならば，必ずその共役な虚数も解にもつ $\boxed{\text{証明も重要}}$

2．解は共役ペアで実軸対称，ガウス平面上の３点幾何の話題へ



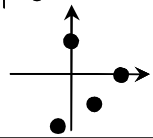
$\Leftrightarrow\ \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$



③ *虚数係数*の整方程式

1．実数解をもつとして，それを x とおき $A+Bi=0$（$A,B\in R$）の形から $A=0\wedge B=0$ より x を求める

2．共役なペア解を必ず持つとは限らない

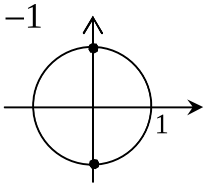


（2）「二項方程式」＝「n乗根」＝「円周等分方程式」＝「$z^n=\alpha$」

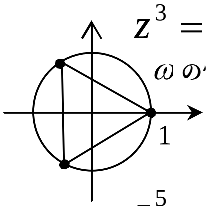
$z^n=\alpha$ の n 個の解は半径 $\sqrt[n]{|\alpha|}$ の円周上に等間隔に並ぶ

ア　実数係数のとき　　複素数平面

$z^2=-1$

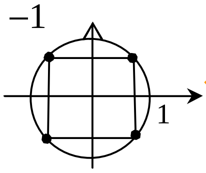


$z^3=1$

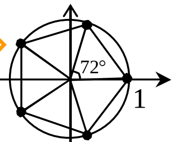


ω の性質

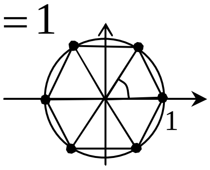
$z^4=-1$



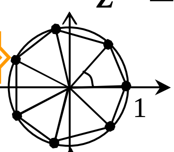
$z^5=1$



$z^6=1$



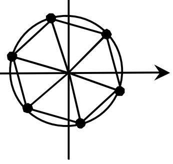
$z^7=1$



イ　虚数係数のとき

$z^6=$ 虚数 の場合

共役解をもつとは限らない



ウ　$\boxed{\text{二項方程式といえば}}$

*極形式の顔で解く*ド・モアブルの n 乗定理

を利用　$z^n=1$ の　n 個の解は

$z=\cos k\dfrac{360^\circ}{n}+i\sin k\dfrac{360^\circ}{n}$ の形

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$　等比の和の公式利用

$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)$ も重要

$(a+bi)^n=c+di$　の顔では難

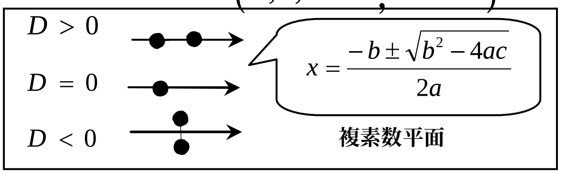
（3）実係数の n 次方程式

虚数解をもつときは

共役な解（実軸対称）をペアにもつ（ノーペアから）

ア　実係数の２次方程式←解の公式あり

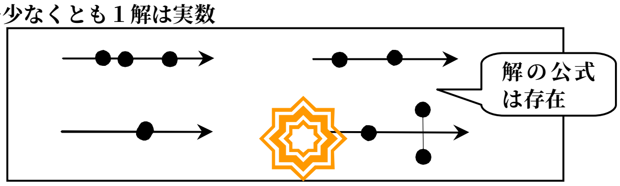
$ax^2+bx+c=0\ (a,b,c\in R,\quad a\neq 0)$



イ　実係数の３次方程式←解の公式は存在する

$ax^3+bx^2+cx+d=0\quad(a,b,c,d\in R,a\neq 0)$

←少なくとも１解は実数



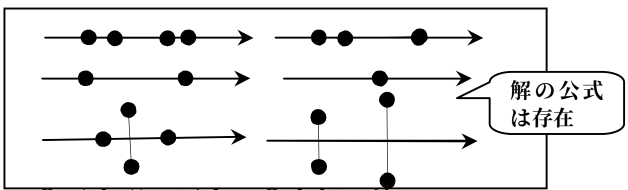
①１実解をもつ　②３実解をもつ

③３解とも整数　④正三角形の頂点

⑤実部が等しい　⑥１実解が $0\le\alpha\le 1$

ウ　実係数の４次方程式←解の公式は存在する

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a,\cdots,e\in R,a\neq 0)$



①正方形の頂点　②実部が等しい

③一直線上

エ　実係数の５次以上の方程式　解の公式は存在しない（ガロア理論）

←解はあるが解の公式はない

オ　相反方程式←４次と５次がほとんど[指導要領]

４次は x^2 で割り，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおく，

５次は $x=-1$ が必ず１解　まず $(x+1)$ で割る

（4）実係数の２次方程式の複素数解の分離問題

Ori.

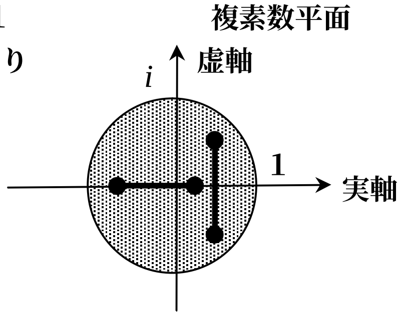
$\boxed{例}$ $a,b\in R$ のとき　$y=f(x)=x^2+ax+b=0$　の２解 α,β について

① ２解 α,β が虚数解のとき　$D=a^2-4b<0$，$\beta=\overline{\alpha}$，$\alpha+\overline{\alpha}=-a, \alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=b$

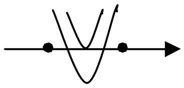
$\alpha^2+a\alpha+b=0$，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$ だけ準備，これらを利用しよう

② ２つの複素数解の絶対値が１より小さい $|\alpha|<1, |\beta|<1$

（ア）２解とも実数のとき，－１と１の間に異なる２解　より

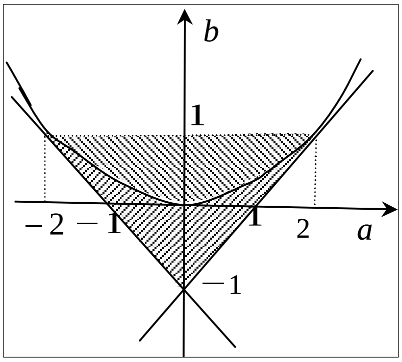


$$\Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \begin{cases} D/4=a^2-4b\geq 0 \\ -1<\text{軸}<1 \quad \therefore -1<-\dfrac{a}{2}<1 \\ f(-1)=1-a+b>0 \\ f(1)=1+a+b>0 \end{cases}$$



（イ）２解とも虚数のとき，$|\alpha|<1, |\beta|<1$　より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4b<0 \text{であって} \quad ① \\ x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i \Leftrightarrow ①② \begin{cases} b>\dfrac{1}{4}a^2 \\ b<1 \end{cases} \\ \text{の大きさ} \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)^2<1 \quad ② \end{cases}$$



（5）高次方程式の複素数解の分離問題

① 実係数の整方程式が虚数解 α を解にもつとき，共役な $\overline{\alpha}$ も解となる

[証明] $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$　$(a_i\in R)$　とすると

$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n=0$　のとき

$f(\overline{\alpha})=a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n$

$=\overline{a_0}\,\overline{\alpha}^n+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}+\overline{a_n}$　$\because a_i\in R$

$=\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n}=\overline{0}=0$

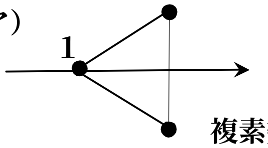
係数が実数なら
$f(\alpha)=0$
$\Rightarrow f(\overline{\alpha})=\overline{f(\alpha)}=\overline{0}=0$

② 実係数の３次方程式　$a,b\in R$

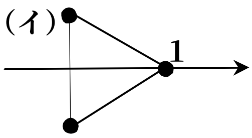
$\boxed{例}$ $(x-1)(x^2+ax+b)=0$ の解が複素数平面上で正三角形

$a^2-4b<0$ のときは
$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$

（ア）



（イ）



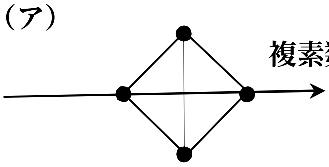
複素数平面

１実数解は因数定理により
虚数解は共役
解と係数の関係　解の公式
複素数平面上の３点幾何に帰着

③ 実係数の４次方程式　$a,b\in R$

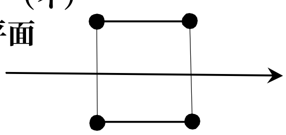
$\boxed{例}$ $(x^2-2ax+a^2+1)(x^2-4x+b)=0$ の異なる４つの解が複素数平面上で正方形

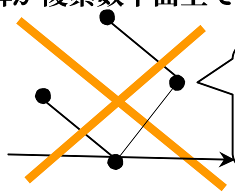
（ア）



複素数平面

（イ）





実係数より
このような
ケースはない

２８ 三角関数の公式

[あのね]「では三角関係の勉強を始めましょう.」Ori.

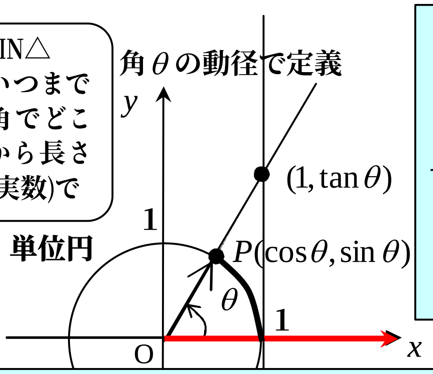
ラジアン角＝半径角？：ラジアンはラテン語の radius (半径) から　円から定義よって三角関数を円関数ということも

（１）[Def.]三角関数(円関数)の定義と値

SIN△ いつまで角でどこから長さ(実数)で

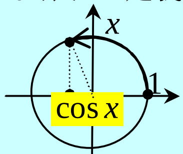
単位円

角 θ の動径で定義

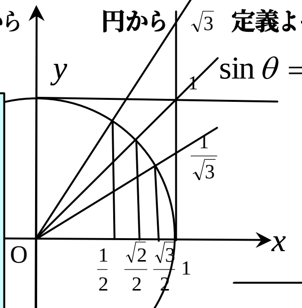


$\overrightarrow{OP} = (\cos\theta, \sin\theta)$

[重要]角度でなく長さで定義

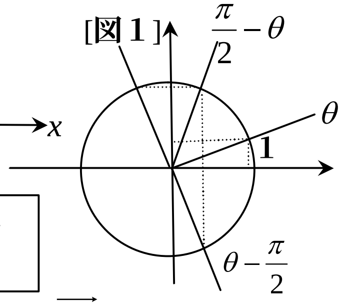


$y = \cos x$ を余弦関数という



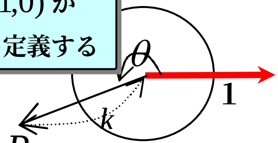
この図を完全に暗記しておく

$\sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ などは図１から



$\overrightarrow{OP} = k(\cos\theta, \sin\theta)$ $k > 0$

[円関数の定義]原点が中心の単位円周上を動く動点 P を考える．点 P が単位円の周にそって点 $(1,0)$ から正の向きに行程 $x \in R$ だけ進んだ位置の x, y 座標を $\cos x, \sin x$ で，OP の傾きを $\tan x$ と定義する



[Def.] $f(x)$ が周期 p の周期関数 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x;\ f(x+p) = f(x)$

$f(x) = a\sin(kx+b)+c = a\sin k(x+\frac{b}{k})+c$ の周期は $\frac{1}{|k|}360°$ $\quad (\frac{2\pi}{|k|})$ ←弧度法では

$f(x) = a\tan(kx+b)+c = a\tan k(x+\frac{b}{k})+c$ の周期は $\frac{1}{|k|}180°$ $\quad (\frac{\pi}{|k|})$

三角関数といえばまず角を揃える．次に関数を揃える。
グラフと微積は,必ずラジアンである事

[物理]　周期の逆数を周波数と呼ぶ

（３）角をそろえる公式（・・になった角を元の角で表す公式）

① $\cos(\theta+90°) = -\sin\theta$, $\sin\theta = \cos(\theta-90°) = \cos(90°-\theta)$ などは[図１]から

サインをコサインに角から９０度を引けばコサインになる

② [Th.]三角関数の加法定理　超重要[☆☆☆]

和の角，差の角を元の角にする公式[東大]三角関数の定義により証明せよ

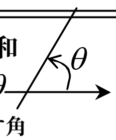
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[覚え方]「サインコサイン･コサインサイン、コスコス（マイナス）サインサイン」推奨　[あのね]「したいコスプレコスプレしたい，コスプレコスプレしたいしたい」「さすってこすってこすってさすって、こすってこすってさすってさすって」もある．以下の公式はすべて加法定理から導かれるのである

[覚え方]１引く積ぶんの和

直線の傾き　$m = \tan\theta$

θ は x 軸の正の方向となす角



$\tan\theta = t$ のとき

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

③ ２倍角の公式＝２倍になった角を元の角にする公式［重要］

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \{ = 2\tan\alpha\cos^2\alpha = 2\tan\alpha\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \{= (1-\tan^2\alpha)\cos^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

[盲点]覚えておくこと　結構出ています。　３乗の次数下げに使うことも
$\theta = 18°$ のとき $5\theta = 90°$ より $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

④ ３倍角の公式＝３倍になった角を元の角にする公式[重要]　[覚え方]３サインはダメ４サインは見事

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$　[覚え方]４こ咲いて,３こ散る

[知ッ得] n 倍角の公式はド・モアブルの定理 $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ から

⑤ **半角（1/2 倍角）の公式＝半分になった角を元の角にする公式　次数下げ公式として[超重要]**

[覚え方]
サインは
差が in

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\qquad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

[注意]角はθでなく2θに揃えることもよくある

（4）角がそろえば次に関数を揃える

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\qquad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

和・差・積　$(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm 2\sin x\cos x$

$(\sin x+\cos x)^2=(\sin x-\cos x)^2+4\sin x\cos x$

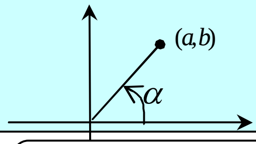
[意味]
$\sin x,\cos x,\tan x$
の１つが判れば他は判る．
$\sin x+\cos x$
$\sin x-\cos x$
$\sin x\cos x$
の１つが判れば他は判る．

（5）形を変える公式　単振動合成の公式[超重要][☆☆☆☆☆]

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha-90^\circ)$$ a,bはθに無関係

難　→　易

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　$\boxed{証明}$加法定理より



・$\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin(\theta+150^\circ)\quad=2\cos(\theta+60^\circ)$

・同じ角はいろいろな形で$\sin\omega t-\cos\omega t=\sqrt{2}\sin(\omega t-\dfrac{1}{4}\pi)$

・[裏技] 単位円周上の点$P(\cos\theta,\sin\theta)$，定点$A(1,-\sqrt{3})$として

内積$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\cdot1\cdot\cos(\theta+60^\circ)$ ←図形的に

[覚え方]角が同じ sin, cos の和は １つの sin で表現できる　**ＳＯＳの公式**
Sin　c0s　Sin の順
・Cos への合成は９０度引くまたは
内積 $a\cos\theta+b\sin\theta$
$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$

Cos への合成は内積の定義から

（6）三角関数の次数下げ公式[☆☆☆] $\int\sin^2 xdx$も次数下げ

$F(\sin^2\theta,\cos^2\theta,\sin\theta\cos\theta)$の形の式は　[角を$2\theta$に揃える]　←$\sin\theta,\cos\theta$の２次式は１次に次数下げ

$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$により←３つ一緒に暗記［超重要］

↓ $A\sin X+B$の形だ

$=a\sin2\theta+b\cos2\theta+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin(2\theta+\alpha)+c$の形にさらに$=\sqrt{a^2+b^2}\sin2(\theta+\dfrac{\alpha}{2})+c$へ

（7）和差⇔積

[覚え方]咲いた咲いた咲いたコスモス　咲かない咲かないコスモス咲かない

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\qquad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\qquad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\qquad \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\qquad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

これらの公式は暗記でなく以下の導き方を覚えておく

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　…　①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　…　②

①＋②より　$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

積はサインコサイン，コサインサイン，　コスコス，サインサインの順，和差は sin 同士の和差 cos 同士の和差の順と覚える
必要に応じ導く

$\boxed{応用}$ $\int\sin^2 xdx$，$\int\sin^3 xdx$，$\int\sin3x\cos xdx$　積分は１次式に次数下げを行う

(7) を用いる証明問題　$A+B+C=180^\circ$のときは，$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1$，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ [美しい]

２９ 指数・対数関数　$y=a^x$ と $y=\log_a x$

（1）[Def.] n 乗根 a　：$\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a} \overset{def}{=}$ ①n 乗すれば a となる②正の数

[Def.] a の n 乗根　：二項方程式 $x^n = a\ (a \in R)$ の解

平方根（２乗根）は２ある
n 乗根は n 個ある

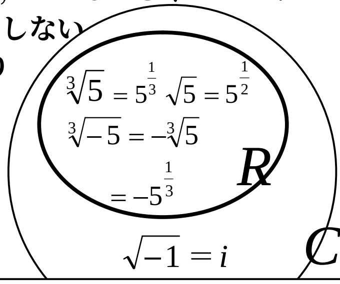
虚数の n 乗根も複素数のところで扱います．

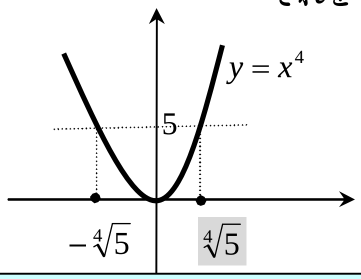
(ｱ) n が偶数のとき $a \geqq 0$ なら　a の n 乗根で実数のものは２つ，正のものを $\sqrt[n]{a}$ とかく

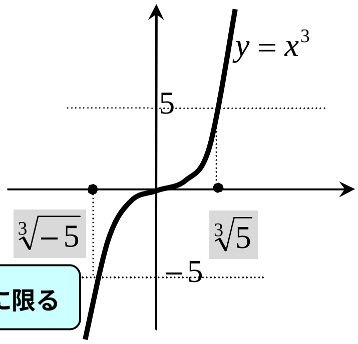
$a<0$ なら　a の n 乗根で実数のものは存在しない

(ｲ) n が奇数のとき $a\ (\in R)$ の n 乗根で実数のものは１つあり

それを $\sqrt[n]{a}$ とかく







[コツ]累乗根 $\sqrt[n]{a}$ はこの図で理解するに限る

累乗根の性質 $a>0, b>0$ として

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$，$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　など

①$\sqrt[偶]{負}$，$\sqrt[4]{-5}$ は a_0, S_0，$\dfrac{1}{0}$ 同様，**定義されない**。ただし，$\sqrt{-1}=i$ として虚数単位を定義

$\sqrt[3]{-5}$
のままではこれらの公式は使えない
$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}=-5^{\frac{1}{3}}$
とすぐ直すくせをつけておく

②$\sqrt[n]{a}$ 特に $\sqrt[奇]{負}$ に注意　$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}=-5^{\frac{1}{3}}$ として指数法則利用

③$\sqrt[n]{a}$ は実数である．上のグラフで覚えておこう

一般に $◯^{実数}$ と表現すると $◯\geqq 0$

（2）[Def.]指数の拡張 $a^{\frac{r}{n}}$　と指数法則

$a^0=1$：　$n \in N$，$a \neq 0$，$a^{-n} \overset{def}{=} \dfrac{1}{a^n}$　：$a>0$ として $a^{\frac{r}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^r}$

[コツ] 累乗根の計算は指数（法則）へ持っていく [難→易]

ただし，$\sqrt[奇]{負}$ に注意　$\sqrt[3]{-5}=(-5)^{\frac{1}{3}}$ としてはいけない

指数法則 $p, q \in R$
$a>0, b>0$ として
$a^p \times a^q = a^{p+q}$，$a^p \div a^q = a^{p-q}$
$(a^p)^q = a^{pq}$，$(ab)^p = a^p b^p$

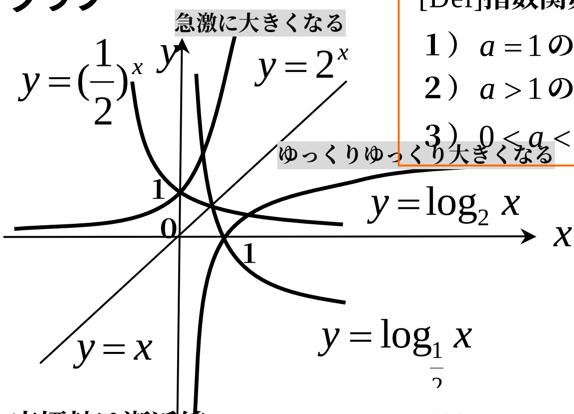
（3）グラフ

[Def]指数関数の定義は実は難しい　$a>0, \alpha \in R$，a^{α}

1）$a=1$ のとき，$a^{\alpha}=1$

2）$a>1$ のとき，$a^{\alpha}=\sup\{a^r : r \in Q, r \leq \alpha\}$ 上限

3）$0<a<1$ のとき，$a^{\alpha}=\inf\{a^r : r \in Q, r \leq \alpha\}$ 下限

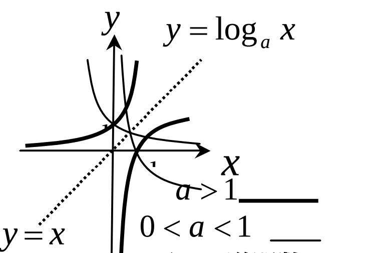


座標軸は漸近線　　$y=x$ に関し線対称

定義域と値域　単調性　指数関数＝パワー関数

[コツ]累乗根・指数・対数の大小もグラフでイメージすると分かり易い

[一般]
底＞１
０＜底＜１
で大違い
位置関係を
覚えておく



[驚きだ] $0<a<1$ のとき，互いに逆関数の $y=a^x, y=\log_a x$ の交点は，１ 点とは限りません。例えば $a=0.05$ のときの２つのグラフは３点での交わり上図の通りではないのです。

[指数計算を対数に]対数計算は裏の近道「人の行く裏に道あり花の山」

[ウェーバーの法則]刺激に対する感覚は対数関数に合っている　$Y = a\log X + b$

(4) [Def.]　対数の定義　$\log_a N$

[解説]

対数の底,10（10進法表示を意識した時）、e（微分積分を意識した時）

$a \neq 1, a > 0, N > 0$ のとき

$N = a^p \Leftrightarrow p = \log_a N$

（この同値関係で対数を定義）

例　「$8 = 2^3 \Leftrightarrow 3 = \log_2 8$」←小さい3を主語に変えた表現

乗スレバ　ヲ

$2 = \sqrt[3]{8}$　　（主語を替えた書き換え問題）

「Taro　loves　Hanako. ⇔　Hanako is loved by Taro.」

(5) 対数の性質

① **[超重要]対数といえばまず真数条件・底の条件**

$\log_a x$ の底は1でない正の数 $a \neq 1, a > 0$，真数は正 $x > 0$

対数といえば　まず真数および底の条件　次に底を揃える

[あのね]　$\log X + \log Y$，$\log XY$ の真数条件は，$X > 0 \wedge Y > 0$ と $XY > 0$ で異なるので，変形せずにまずなのです

② **次に底を揃える（底の変換公式）**

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$ ただし，$c \neq 1, c > 0$

指数と対数は互いに逆関数だから当然（公式）

乗スレバ

$a^{\log_a x} = x \Leftrightarrow \log_a x = \log_a x$, ヲ　$\log_a a^x = x$

[大原則]三角関数は角を揃える．対数関数は底を揃える．]

[裏技]　$\log_a b = \log_{a^2} b^2$　例　$\log_{\sqrt{2}} 3 = \log_2 9$　とできる

☆ $\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$

はよく出る［重要］

☆ $2\log_a x = \log_a (x+2)$ と

$\log_a x^2 = \log_a (x+2)$ は違う

③ **対数の計算公式**　前提条件 $M > 0 \wedge N > 0$ のもとで（重要）

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$，　$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

$\log_a M^p = p\log_a M$　[要注意] $y = \log_a x^2$ と $y = 2\log_a x$　は違う

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

真数条件を一方のみにできることも

対数方程式⇔真数条件付方程式

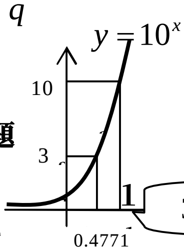
（対数方程式は解の分離問題に）

④ **底で場合分け**　不等号の向き，単調増加・単調減少に注意

（ア）$0 < a < 1$ のとき，$\log_a p < \log_a q \Leftrightarrow p > q$

（不等号の向きは入れ替わる）

（イ）$1 < a$ のとき，$\log_a p < \log_a q \Leftrightarrow p < q$



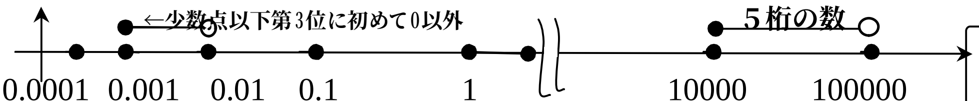
[重要]底が文字の対数不等式はすべてをカバーする問題

例　$\log_a x \leq \log_{a^2}(x+2)$　（センター）

$3 = 10^{0.4771} \Leftrightarrow \log_{10} 3 = 0.4771$

(6) 応用。10進法での桁数の問題　応用問題

a が n 桁の整数 $\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq a < 10^n$ 対数計算によりその数を 10^p の形に，さらに $10^n \times 10^{0.\cdots}$ の形に



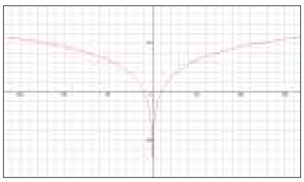
[Quiz] 1，2，3を用いた最大最小の数は

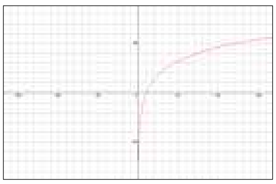
2^{31} ？ 3^{21} ？　1^{23}

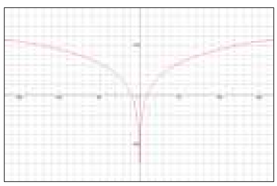
正の大きい数　小さい数の大きさ・小ささの程度を大ざっぱに調べてみよう

例　3^{100} = a////////////////////////////////b　←桁数，最高位の数 a，末尾の数 b を求める．

(7) 対数関数のグラフ　① $y = \log_3 x^2$　② $y = 2\log_3 x$　③ $y = 2\log_3 |x|$







[盲点] えっ　$\log_3 x^2 = 2\log_3 x$　は誤ですか．[答え]　はい誤です．$\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$　（正），

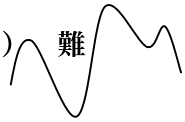
$x > 0$ のときは $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$（正）　　$\log_3 x^2 + 2\log_3 x = 2\log_3 x + 2\log_3 x = 4\log_3 x$ は

最初の式の真数条件 $x > 0$ より（正）　　$\log_3 x^2 + \log_3(x+1) = 2\log_3 x + \log_3(x+1) = \cdots$　は（誤）

（８）　$y=f(x)$三角･指数･対数･分数関数，方程式の実解の個数→おきかえ→2次3次に帰着

例　$t=\sin x$，$t=\sin x-\cos x$，$t=2^{x}+2^{-x}$，$t=\log_2(x^2+1)$，$t=x^2+x$，$t=x+\dfrac{1}{x}$など

（Ⅰ） 難



いろいろなtの値から対応するxの個数を考える

$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-45°)$

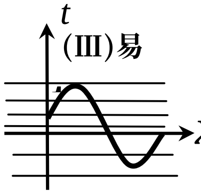
$t=2^{x}+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^{x}2^{-x}}=2$

$t=\log_2(x^2+1)>0$

$t=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$　,$(x>0)$

（Ⅱ）易$g(t)$

（Ⅲ）易



[超重要] tの変域に注意せよ

$x \xrightarrow{易} t \xrightarrow{易} y$（$x \xrightarrow{難} y$）

「トラは死して皮を残す」

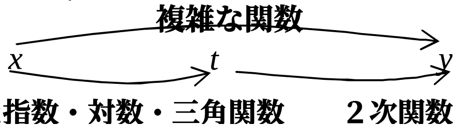
トラ：x　皮：tへの制限

三角は単振動合成；相加相乗平均；グラフなど利用

[コツ]（Ⅰ）難を（Ⅱ）（Ⅲ）易の2つのグラフで考え　$x\leftrightarrow t\leftrightarrow g(t)=y$の対応の様子を追う．　難→易＋易

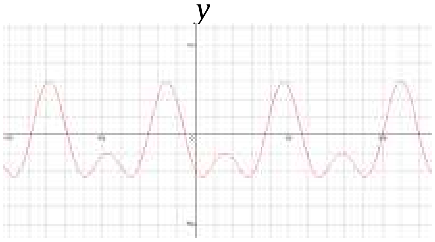
＜解の個数問題＞＜最大･最小問題＞

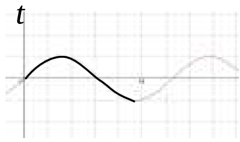
難しい三角･指数･対数の問題は置き換えにより易しい2つの関数に帰着する

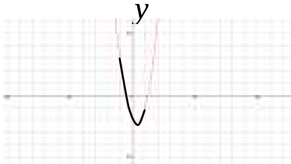


例①　$y=3\sin^2 x-2\sin x-2\ (0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi)$　⇔　$y=3t^2-2t-2$、　$t=\sin x$

[重要]解の個数問題のコツは置き換えのグラフを描け（変域に注意）





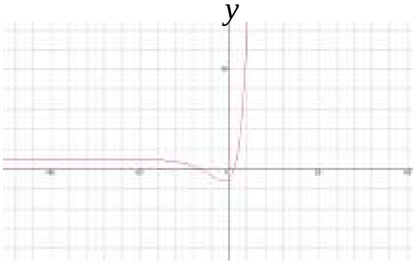


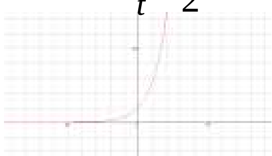
[難]三角・指数・対数・分数の関数や方程式や不等式は置き換えで

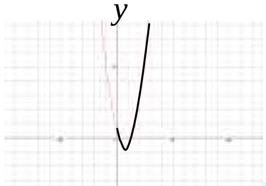
このグラフは難・不明　　→帰着→　　この２つのグラフは易・描ける

例②　$y=2(e^{x})^2-3e^{x}+\dfrac{1}{2}$　⇔　$y=2t^2-3t+\dfrac{1}{2}$　，　$t=e^{x}>0$

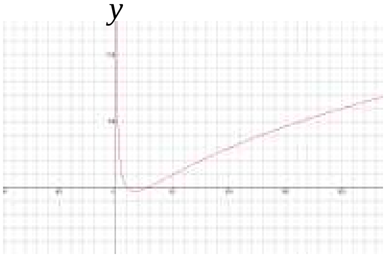
[易]２次の関数・方程式・不等式に帰着（変域に注意）

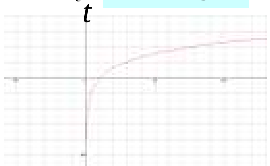






例③　$y=(\log x)^2-\log x$　⇔　$y=t^2-t$，　$t=\log x$





指数・対数関数の三角関数との大きな違いは１対１であること。三角関数の逆関数は１対１の区間で存在する（高校では扱わない。）

一般に$\sin x=\sin y$から$x=y$とできないのに対し

$a^{x}=a^{y}$、$\log x=\log y$から$x=y$と指数･対数をはずすことができる

$\boxed{\text{例題}}$　三角方程式・指数方程式の解の個数問題

→文字を含む形で置き換え後２次方程式の解の分離問題に

$\boxed{\text{問１}}$　aを実数の定数とする。xについての方程式

$$\cos 2x - 4a\cos x - 2a + 1 = 0$$

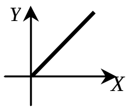
の$0 \le x < 2\pi$での異なる実数解の個数は、定数aの値によってどのように変わるか。

$\boxed{\text{問２}}$　方程式$9^x + 2a\cdot 3^x + 2a^2 + a - 6 = 0$を満たす$x$の正の解，負の解が１つずつ存在するような，定数$a$の値のとる範囲を求めよ。

（９）対数方程式・不等式の真数条件の扱い→同値性に留意してより単純に

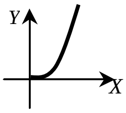
$$Y = 2\log X \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \log X^2 \\ X > 0 \end{cases}，\quad 2\log X = \log X^2, (X > 0)，\quad \log X^2 = 2\log|X|$$

$$\log Y = \log X \Leftrightarrow \begin{cases} Y = X \\ X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



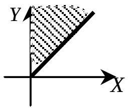
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = X \\ X. > 0 \end{cases}$$

$$\log Y = 2\log X \Leftrightarrow \begin{cases} Y = X^2 \\ X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = X^2 \\ X. > 0 \end{cases}$$

$$\log_2 Y \ge \log_2 X \Leftrightarrow \begin{cases} Y \ge X \\ X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y > X \\ X. > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

真数条件を一方のみにできることも
対数方程式⇔真数条件付方程式
（対数方程式は解の分離問題に）

$\boxed{\text{問３}}$ xについての方程式$\log_3(x-3) = \log_9(kx-6)$が相違なる２つの解をもつように、実数$k$の範囲を求めよ。

$$\log_3(x-3) = \log_9(kx-6) \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(x-3) = \frac{\log_3(kx-6)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx - 6 = (x-3)^2 \\ x - 3 > 0 \\ kx - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx - 6 = (x-3)^2 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

←文字を含む真数条件をはずした

■同値性に留意した変形で解く類題

$\boxed{\text{問４}}$　連立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdot\cdot ① \\ x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 & \cdot\cdot ② \end{cases}$ を解け。

①-②より $x - y + 1 = 0$　・・③　，　①かつ③から②が得られるので$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ① \\ ③ \end{cases}$

$\boxed{\text{問５}}$　共通解問題 $\begin{cases} x^2 + kx + 3 = 0 & ① \\ x^2 + x + 3k = 0 & ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + kx + 3 = 0 & ① \\ (k-1)(x-3) = 0 & ①-②\cdots③ \end{cases}$

①②が共通の実数解をもつ　⇔　①③が共通の実数解をもつ

③は（ｉ）$k - 1 \ne 0$のとき$x = 3$（これが①の解となるとき共通解となる）

①に$x = 3$を代入して$k = 4$（$\ne 1$で適）共通の実数解$x = 3$

（ii）$k - 1 = 0$のときxは任意の値（このときの①の実数解は共通解となる）

$k = 1$を①に代入　$x^2 + x + 3 = 0$は実数解をもたない。

よって①③の共通の実数解はない

（ｉ）（ii）から$k = 4$のとき，共通の実数解$x = 3$をもつ

３０ 数列（実数列・複素数列）

1,2,3 ・・・ N → 数　　[旧課程]複素数のときもある ガウス平面上でイメージせよ

（１）[Def.]数列の定義　実数に自然数の添字をつけて並べたもの $\{a_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を数列という。自然数の集合から数への対応よって a_0, S_0 は無い！[ナルホド１からスタートと決まっているのか]

[重要]・数列の添え字は１から始まるのが大前提よって、公式では，初項 a とは必ず第１項 a_1 のこと

・漸化式 $a_n = 3a_{n-1} + 2$ とあれば $n = 2,3,4,\cdots$ として a_1 から定まるのである.
これが気に入らなければ $a_{n+1} = 3a_n + 2$ （$n = 1,2,3,\cdots$）と書き換えてよい

[重要][☆☆☆]数列を自然数上の関数 $a_n = f(n)$ と捉えグラフをイメージする

（２）テーマは下記の５種類の数列に対して一般項 a_n と n 項の和 S_n を求めること

$a = a_1$

	①等差数列	②等比数列	③等差×等比型	④分数列	⑤整式列
一般項 a_n	$a + (n-1)d$	ar^{n-1}	nx^{n-1} など		n^k
部分和 S_n	$\frac{n}{2}(a+l)$ 台形の面積と同じ $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$	$\frac{a(1-r^n)}{1-r}, (r \neq 1)$ ずらして引く na ，$(r = 1)$	$S_n - rS_n$ ずらして引く	**部分分数の差** 一般項を $a_n = f(n+1) - f(n)$ の形に変形	**Σの公式** シグマで

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たすとき**等差数列**である

（ｉ）$a_{n+1} - a_n = d$（一定）（ii）$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

(iii) $a_n = pn + q$（p, q 定数）(iv) $S_n = pn^2 + qn$

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たすとき**等比数列**である

（ｉ）$a_{n+1} = ra_n$（r 一定）（ii）$a_{n+1}{}^2 = a_n a_{n+2}$

(iii) $S_n = p(r^n - 1)(r \neq 1)$ または $S_n = an$（a, p 定数）

（３）一般項 a_n　① 一般項 a_n を階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ から求める方法[☆☆☆]　[覚え方]

公式ではなくこの長靴の図であれば添え字のずれなし極めて有効
指の間は４つ

a_1　a_2　a_3　……　a_{n-1}　a_n　a_{n+1}　（難）

b_1　b_2　b_3　……　b_{n-1}　b_n　←（易）の時，意味あり

n でない $n-1$

階差 $b_n = a_{n+1} - a_n$ のとき，$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$

・階比 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ならば，　$a_n = a_1 \times (b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{n-1}) \quad (n \geq 2)$

・[なるほど]　等差　$a_n = a_1 + (d + d + \cdots + d) = a_1 + (n-1)d$
　　　　　　　等比　$a_n = a_1 \times (r \times r \times \cdots \times r) = a_1 r^{n-1}$

・[技巧][易と難が逆]和 $\sum_{k=1}^{n} b_k$（難）を、$\{a_n\}$ から求めることができる

$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$

$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = a_n - a_1$

$b_n = a_{n+1} - a_n$　のとき，$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$

つまり，一般項 $= f(n+1) - f(n)$ とできたら，部分和 $= f(n+1) - f(1)$ である

（差分する）とは（階差をとる）こと

[覚え方]「一般項は階差の長靴」
一般項 $(n \geq 2)$ は
　階差の長靴
　階比の長靴
の図を描け
[注意]長靴の最初はどこからでもよい
[添え字のズレに要注意]
$a_{n+1} - a_n = b_{n+1}$ は誤
絶対に，$a_{n+1} - a_n = b_n$
であること　一致

② 一般項 a_n を部分和 S_n から求める方法

・（公式）$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \ (n = 2,3,4 \cdots) \end{cases}$

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

S_1　S_{n-1}　S_n

[超重要]和が判れば,一般項 $(n \geq 2)$ はn項の和からn－1項の和を引いて求まるということ。
ただし初項は第1項のみの和として求める

・[応用例]ある形の和が与えられた数列の問題

例　$\sum_{k=1}^{n} ka_k = n$ の式　は $b_k = ka_k$ として，$\sum_{k=1}^{n} b_k = n$ の式　の形へ

階差や,和が判れば、一般項は判る。一般項を差に分けると、和が求まる

（4）部分和 S_n　部分和の３つの顔 S_n，$a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ ←どれも同じ

例　a_n と S_n を含む漸化式　$S_n=2a_n+n$，

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_n+n$　，　$a_1+a_2+\cdots+a_n=2a_n+n$

見かけ上の顔の違いに振り回されず S_n に直せ

[センター]等差と等比を基本として
ｉ）等差×等比型を作り和を求める
ii）等差数列の等比群　群数列の話題へ
iii）等差と等比の共通項問題へ
iv）分数列，Σ(等差＋等比)　など

①②　等差と等比の部分和は→公式[基本中の基本]

等差数列　$S_n=\dfrac{n}{2}(a+l)=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

等比数列　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r},(r\neq1)$　$S_n=na,(r=1)$

[話題]天才ガウス君に質問
$1+2+3+4+\cdots\cdots+9$
$1+2+4+8+\cdots\cdots+256$　を求めよ．
$1+2\cdot2+3\cdot8+\cdots\cdots+9\cdot256$

③ 等差×等比型数列の部分和は→ S_n-rS_n を作る[超重要][☆☆☆]

a_n, S_n が求まれば，$n=1$ を代入して検算すること

$$
\begin{array}{rl}
S_n= & 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} \\
-)\quad xS_n= & \quad 1x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \\
\hline
(1-x)S_n= & 1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n
\end{array}
$$

[複雑化]

［超重要］
等差×等比型は
S_n-rS_n で

S_n を S と書くこともある

$=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$　$(x\neq1)$ よって，$S_n=\begin{cases}\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x} & (x\neq1)\\ \dfrac{1}{2}n(n+1) & (x=1)\end{cases}$

←通分する必要は特にありません．なぜなら極限はこの方が考えやすいので

和を求めるとは・・・をなくした式にする事

[裏技] $x\neq1$ のとき，$1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ の両辺を x で微分すると一発で求まる

$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\dfrac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

④　分数列の部分和　一般に $a_n=f(n+1)-f(n)$ の形にできるもの

$n\times n!$，　$n(n+1)(n+2)(n+3)$
$\dfrac{5^n(4n-1)}{n(n+1)}$，　$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
を $f(n+1)-f(n)$ の形に

ある程度，数多く書いて打ち消しあう規則性を正確に捉える

$S_n=\Delta\{(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})+(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})+(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})+(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})+\cdots+(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})+(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})+(\frac{1}{o}-\frac{1}{o})\}$ ←せめてこれぐらい書く

例 $S_n=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$　参考 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{n}{n+1}$，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

⑤　整式列の部分和は→ $\sum$ （シグマ）の公式を利用する．

イミは $\sum_{k=1}^{k=n} a_k$ だがこうは書かない

小文字 σ (シグマ)は普通、標準偏差に使う

［重要］分数列の和は
部分分数の差に一般項を差に
$\dfrac{1}{(n+a)(n+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{n+a}-\dfrac{1}{n+b}\right)$

[Def.]　[定義]　数列 $\{a_n\}$ に対して $\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{def}{=} a_1+a_2+\cdots+a_n$

[性質]（ｉ）　$\sum_{k=1}^{n} pa_k=p\sum_{k=1}^{n} a_k$，　p は k と無関係

（ii）　$\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$　主役は k

積と商は成り立たない！要注意

$\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\neq\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$　　$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{b_k}\neq\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$

まとめて $\sum_{k=1}^{n}(pa_k\pm qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k\pm q\sum_{k=1}^{n}b_k$，　p,q は k と無関係

[公式] シグマの公式 [意味読みできたら一人前] $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 「kが1からnまで化けながら加えましてェは、kの2乗」

（ｉ）$\sum_{k=1}^{n} c = nc$ （cはkと無関係な定数　$\forall n; a_n = c$なる数列の和）

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

これらの証明は独特です
$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$
などの恒等式を利用して証明する
$\sum_{k=1}^{n} k^4$ ＝？も同様に、結果は複雑
$= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

（ii）$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$，$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$，$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2$

[知ッ得] [覚え方]＋を形式的に－にしたものに，たまたまなる．階差数列を用いた一般項で出てくる

(iii)[知ッ得] $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$，$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

連続自然数の積の和

(iv) [知ツ得]1次式のシグマは等差の和 $\sum_{k=1}^{n}(pk+q) = \frac{n}{2}\{(p+q)+(pn+q)\}$

$\sum$ 等差 $= \frac{1}{2}$項数（初項＋末項）

[応用]第k項にnを含む整式列も$\sum$ を利用

2重Σの問題どの文字に関するΣであるかを考えて内から順次計算していく.
$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k(k+1)$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$\boxed{例}$ $\sum_{k=1}^{n}(n^2 - kn + k^2)$　nはkと無関係

[重要]主役kに対しnは定数扱い

$= \sum_{k=1}^{n} n^2 - n\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = n\cdot n^2 - n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \cdots$

[出題者の独り言]整式列以外のテーマのもの（部分分数の差，$S_n - rS_n$）をΣで書くと次のような間違いをしてくれる．だから出題する

（ア）$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}$　（誤）

（イ）$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \times \sum_{k=1}^{n} k \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1}{2}n(n+1)\frac{1-x^n}{1-x}$　（誤）

（ウ）$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$　（正）←等比のシグマは初項･公比･項数を確認　公式適用する

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$　（正）

$\sum$ で求めることがテーマなのは整式列$\{n^k\}$それ以外の数列で$\sum$ で簡潔に表現されたものは$\sum$ をはずせ．
lim Σの形でΣの計算ではなく区分求積法で積分へ持っていくタイプも[数III]

など$\sum$ 記号に振り回されるな，$\sum$ を用いない表現に直して考える方がよい

$(a+b+c+d+\cdots+h)^2 = (a^2+b^2+\cdots+h^2) + 2(ab+ac+\cdots+jh)$ を利用する問題もある

（５）その他の重要な数列

①周期性のある数列　②定積分数列

③ 調和数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$　④ 一般調和数列 $1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \cdots$　⑤ フィボナッチ数列 $F_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ F_{n-1}+F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$

（６）群数列の扱い

[あのね]清掃当番は出席番号でなく<u>班番号を主役</u>に考えるのに似ている

$\boxed{例}$（等差の等比群）　　群，仕切り，グループ，班・・・・

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15　16　　←*通し番号*

1 | 3　5 | 7　9　11　13 | 15　17　19　21　23　25　27　29 | 31・・・・ | ・・・・

①　②　③　④　⑤　*n-1*　*n*　←*群番号*

1コ　2コ　4コ　8コ　2^{n-2}コ　2^{n-1}コ←*個数*

群番号が主役

群に含まれる項の数にも着目

1	2	5	10	17
4	3	6	11	18
9	8	7	12	19
16	15	14	13	20
25	24	23	22	21

のようなものも同様

[知ッ得]群数列としての何か特別な理論とか公式は特にありません

[超重要]群数列の資料づくりは
①具体的部分を多く書きだし，一般部分も書いておく
②***通し番号・群番号・群個数***を書き出し群番号を主役とし，いろいろと考察する
③具体的部分で捉え一般化するのがコツ

（7）漸化式のパターン分類[超重要][☆☆☆☆☆][花プリ]

漸化式は，前の項、次の項など項の間の関係で，$n=1,2,\cdots$ の部分が実は非常に重要であり，無限連立等式を表す。

① $\boxed{a_{n+1}=f(a_n)\quad 型}$ ← $\alpha=f(\alpha)$ 平衡値（バランスバリュー）α は引く

ア $a_{n+1}=a_n+d$ 等差型　イ $a_{n+1}=ra_n$ 等比型　（d,r,p,q,r,s は n と無関係とする）

ウ $a_{n+1}=pa_n+q$ 型　基本　エ $a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ ←逆数をとる

オ $a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ ←平衡値を２つ利用

カ $a_{n+1}=ka_n(1-a_n)$ ←周期点の問題　[重要]

キ $a_{n+1}=\sqrt{pa_n+q}$ 平衡値は引く，はさみうち論法で極限を

基本必須　(複素数列でも)

$a_{n+1}=pa_n+q\ (n=1,2,\cdots)$

$\alpha=p\alpha+q$

ア) $p\neq1$ のとき $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$ とし

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ に変形

$\{a_n-\alpha\}$ は公比 p の等比数列

$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$

$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$

さらに $\lim_{n\to\infty}a_n$ は p で場合分け

イ) $p=1$ のとき　等差より‥‥

② $\boxed{a_{n+1}=a_n+f(n)\quad 階差型}$ 階差型数列　基本

$a_{n+1}=f(n)a_n$　階比型数列　長ぐつ

③ $\boxed{a_{n+1}=pa_n+f(n)\quad 型}$ 超重要　$f(n)$消去

ア $f(n)=pn+q$ のとき引く　イ $f(n)=q^n$ のとき割る

④ $\boxed{a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\quad ３項間型}$ 基本

ア $p+q=1$　イ $p+q\neq1$

[重要] $x^2=px+q$ の根 α,β 特性根を利用

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

⑤ $\boxed{S_n\ と\ a_n\ を含む漸化式}$ $\{a_n\}$ のみまたは $\{S_n\}$ のみの漸化式へ

$n=1$ を代入，$a_1=S_1$ から a_1 を求める．$(n\geq2)$

[超重要] S_n は $a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ のときもある

漸化式は①解く問題②解かずに利用する問題とがある。一般項が求めることができるのは幸運に恵まれた場合であり、一般には数列 $\{a_n\}$ が帰納的に定義されても一般項を n で表すことは不可能である。

⑥ **積型漸化式**　対数をとる（対数のかたまりをほぐす役割あり）

⑦ **連立漸化式**　ア $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ 型　$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$

特にイ $\begin{pmatrix}p & q\\ q & p\end{pmatrix}$ 型　$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=qa_n+pb_n\end{cases}$　和と差を作る[重要]

ウ 一般型　１．等比型に帰着　２．$\{b_n\}$ を消去④などに帰着　３．行列の n 乗問題に　など

漸化式を作る問題
①場合の数漸化式
　確率漸化式
②行列の n 乗問題
③積分漸化式　など

⑧ **帰納的方法**　一般項を予想して数学的帰納法（のパターンは漸化式から）で証明する問題

⑨ **融合型・非隣接２項型**　例（奇数項と偶数項を２つの漸化式で定義・a_{n+2} と a_n の漸化式）

⑩ **複素漸化式**　[コツ]計算より複素数平面上でイメージする．

$z_{n+1}=z_n+\beta$（平行移動）$z_{n+1}=\alpha z_n$（原点中心の回転と拡大）

$z_{n+1}=\alpha z_n+\beta$ など重要（平衡値）回転と拡大の点列に（スパイラル点列）

⑪ **行列漸化式** $X_{n+1}=AX_n+B$ は $C=AC+B$ を利用 $X_{n+1}-C=A(X_n-C)$ と変形する。交換法則不成立に注意・・

⑫ **不等式**もある

31 整関数の積分

整関数とは1次関数，2次関数，3次関数，…

公式 $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$ より

$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g$

しかし $\int fg \neq \int f\int g$，$\int\frac{f}{g}\neq\frac{\int f}{\int g}$

(1) [Def.]導関数の定義 $f'(x)\overset{def}{=}\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

?! 現学習指導要領では区分求積から定積分を定義していない。

不定積分の定義 $\int f(x)dx=F(x)+C\overset{def}{\Leftrightarrow}F'(x)=f(x)$

定積分の定義 $\int_a^b f(x)dx\overset{def}{=}[F(x)]_a^b\overset{bydef}{=}F(b)-F(a)$

[意味読み] $\int_a^b f(x)dx$

変化の様子f(x)に微小な幅dxをかけてaからbまで加え合わせる

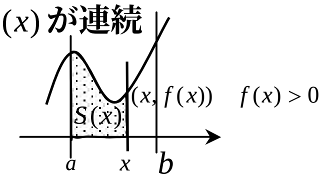
（2）[Th.]微積分学の基本定理 面積の微分 $S'(x)=f(x)$

よって $f(x)\geq0$ のとき右図の面積は定積分により求まる

$$S=\int_a^b f(x)dx\overset{def}{=}\left[S(x)\right]_a^b\overset{def}{=}S(b)-S(a)$$ ←定積分の定義

[微積分の基本定理の意味] 符号付き面積は実は原始関数から求まる！

証 $f(x)$ が連続



$$S'(x)\overset{def}{=}\lim_{h\to0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h\,f(t)}{h}=\lim_{t\to x}f(t)=f(x)$$

$$S=S(b)-S(a)=\int_a^b f(x)dx$$

（3）積分の重要公式 n は自然数，C は積分定数

積分は積分しないがテーマ．如何に楽するかを考えよう

まともにやれば計算間違い

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

[重要][暗記]さらに次の変形を

$(\beta-\alpha)^3=\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$

$=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$

最重要公式

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\int_a^a=0$，$\int_a^b=-\int_b^a$，$\int_{-a}^a$ 奇関数 $=0$，$\int_{-a}^a$ 偶関数 $=2\int_0^a$ 偶関数

積分は積分しないがテーマ

重要 $\int(x-\alpha)^n dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$，$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\frac{1}{a}+C$

（4）関数方程式

① 微分方程式　整関数で次数をまず決定するもの

② 積分方程式　[パターン分類][超重要][☆☆☆☆☆]

未知のものが関数である何らかの関係（微分，積分，など）からこれを満たす関数を求めることを関数方程式を解くという

[類]数方程式　行列方程式

数列方程式は漸化式

Ⅰ 定数型　（a,b を定数として）

$\int_a^b f(t)dt=k$　t のみの式で変数 x を含まないこと

$\int_a^b(x-t)f(t)dt$　x を $\int$ の外へ，そのあと定数 k，h とおく

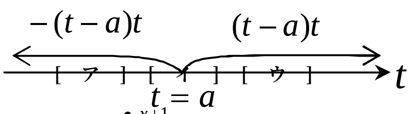
Ⅱ x の関数型（文系の範囲はこの程度まで）　x を含まない t のみの式であること

$\int_a^x f(t)dt$ 型は　[公式] $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　←微積分学の基本定理[重要]

（5）絶対値の定積分[超重要][☆☆☆☆☆][コツ][花プリ] 0ri.

例 $\int_x^{x+1}|t-a|t\,dt$

③←　②　←①



（ア）$x+1\leq a$ のとき　与式 $=\int_x^{x+1}\{-(t-a)t\}dt=$

（イ）$x<a<x+1$ のとき　与式 $=\int_x^a\{-(t-a)t\}dt+\int_a^{x+1}(t-a)t\,dt=$

（ウ）$a\leq x$ のとき　与式 $=\int_x^{x+1}(t-a)t\,dt=$

[コツ]絶対値の定積分

$\int_1^x|t-a|tdt$

③←　②　←①

①t 軸上に

②絶対値を場合分けした関数式

③積分区間

[コツ]　t の関数 $|t-a|t$ を，t に関して x から $x+1$ まで積分すると右から読み，この順に考えると容易

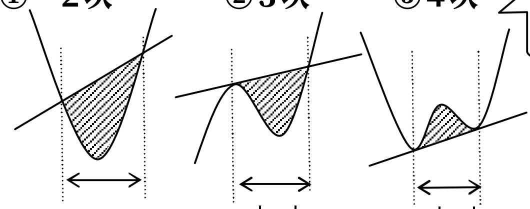
（6）２次関数と直線・接線で囲まれた部分の面積の公式[知ッ得][☆☆☆☆☆]　Ori.

面積$S=\int_{左}^{右}$長さ・幅$=\int_a^b$(上－下) dx　（$a<b$←重要）

$\int$ は無限に加える，上－下は長さ，dxは薄い横幅といったイミ

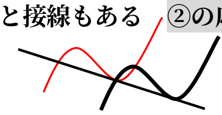
三角形の面積は底辺と高さで決まる，これらは最高次の係数と幅で決まる.

①　２次　　②３次　　③４次



[覚え方]「６３３で１２年.大学４年で卒業し３０歳でゴールイン」

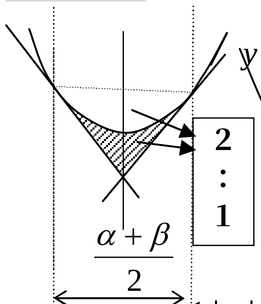
出題者はこれまでにない放物線と直線を境界とする形を考えている
３次と２次で挟まれた部分
３次曲線と接線もある　②の応用

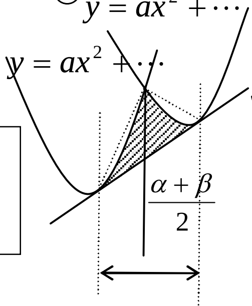


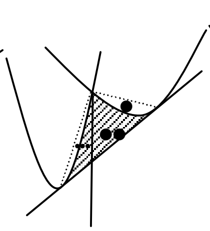
[知ッ得] $S=\frac{|a|}{6}$幅^3　，$S=\frac{|a|}{12}$幅^4，$S=\frac{|a|}{30}$幅^5

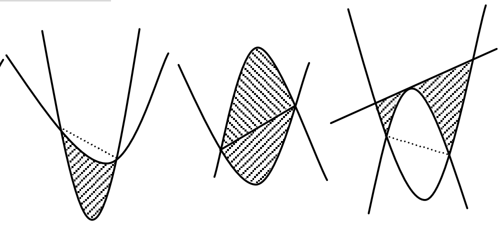
通称「6分の3乗公式」という　　cf.半分の２乗

①⑩の応用④　　⑤　　⑥　　①の応用⑦　　⑧　　⑨









[知ッ得]④⑤ $S=\frac{1}{2}\frac{|a|}{6}$幅^3　　⑥ $S=2\frac{|a|}{6}幅_1{}^3+2\frac{|a|}{6}幅_2{}^3$

境界が放物線と直線（接線） 軸に平行な直線で囲まれた図形の面積は積分に頼らず公式で処理する気持ちで解かないと間に合わない。文字が入るほど。特にそれらが複数のもの、座標軸であるものが重要

[要注意]接線がx軸と一致しているケースが狙われる

（7）２次関数と接線と軸平行直線で囲まれた部分の面積[☆☆☆]（$\alpha<\beta$

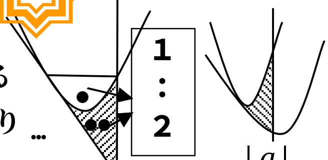
[接線・面積といえば]
接線とで囲まれた部分は微積の融合問題としてセンター頻出

$\int_{接点}(2次曲線-接線)dx=\int_{接点}a(x-接点)^2dx$の形と先をよむと積分が楽

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2dx=\left[\frac{a}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta=\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3$$←展開せずに積分　⑩[超重要]　[知ッ得]

幅の３乗は$(\beta-\alpha)^3=\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$で計算する

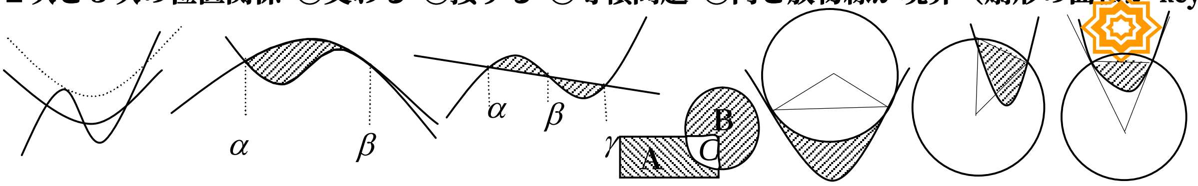
または解の公式から直接$\beta-\alpha=$が簡単[推奨]∵ $\alpha,\beta=\frac{\Delta\pm\sqrt{\Diamond}}{2}$ より …



⑩ $S=2\frac{|a|}{6}$幅^3

（8）３次関数・円を境界とする面積　[注意]京大(文）は体積も出る

２次と３次の位置関係 ⑪交わる ⑫接する ⑬等積問題 ⑭円と放物線が境界（扇形の面積がkey）



⑫ $\int_\alpha^\beta a(x-\beta)^2(x-\alpha)dx=a\int_\alpha^\beta(x-\beta)^2(x-\beta+\beta-\alpha)dx=a\int_\alpha^\beta\{(x-\beta)^3+(\beta-\alpha)(x-\beta)^2\}dx$

⑬等積問題は計算が楽になる様に工夫する．βを使わずに$\int_\alpha^\gamma(f-g)dx=0$で計算する

A＝B⇔A＋C＝B＋Cを利用　[知ッ得]３次関数のとき，変曲点を通過する直線

⑭円と放物線とで囲まれた部分の面積は、いろんなパターンで出題される可能性大[要注意]