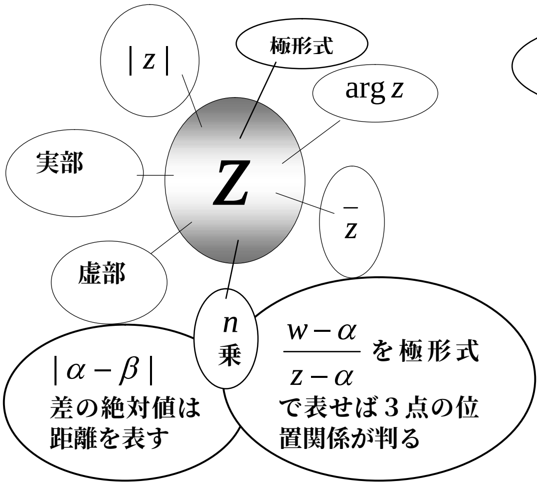
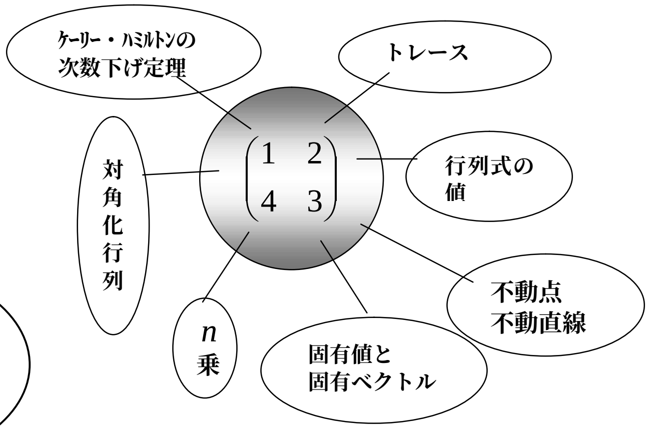
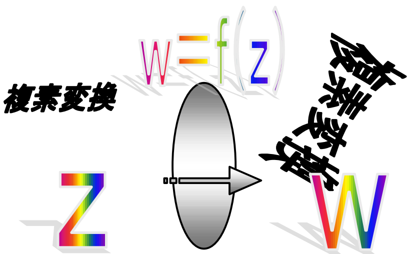
Ⅳ　代数学・線形代数学

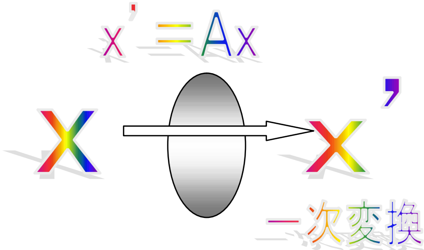
数・複素数，ベクトル，行列　「複素数平面は旧課程」

複素数と行列のプロパティー（属性，～の・・）

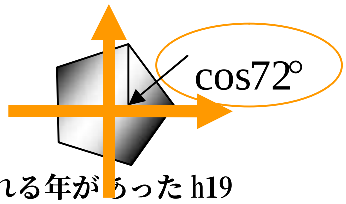








複素数の問題は,
① *さっさと $x+yi$ にして座標にした方がよいもの*
② *z のままで考えたらよいもの*
③ *極形式にするとよいもの　　　　の３通りある*



複素数平面は旧課程，行列は新課程で京大文系でも出題される年があった h19

行列の問題は,
① *さっさと成分で計算した方がよいもの*
② *A のままで考えたらよいもの*
③ *ミックスで考えるもの（ハミルトン・ケーリーの定理利用）*
④ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *の形にするとよいもの　　の４通りある*

２２ 複素数と複素数平面（ガウス平面） 小学校以来習ってきた数の最終章

（１）[Def.][Start] $i \overset{def}{=} \sqrt{-1}$，$i$ を**虚数単位**という　[性質]　$i^2 = -1$

$a, b \in R, a + bi$ を**複素数**と定義（a を**実部** real-part，b を**虚部** imaginary-part）

その**共役**（きょうやく）**複素数**を $\bar{z} \overset{def}{=} a - bi$，**絶対値**を $|z| \overset{def}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$ と定義する

ｶﾙﾀﾞﾉ(1501～)が方程式の根として虚数 $\sqrt{-1}$ を導入し imaginary number の頭文字から $\sqrt{-1}$ を i としたのはｵｲﾗｰ（1707～）である．尚 $i^2 = -1$ で i を定義すると $i = \pm\sqrt{-1}$ となりマズイ．**演算**は四則演算＋－×÷が定義され，i^2 が現れたら $i^2 = -1$ を使って　（実数）＋（実数）i　の形に整理する

[あのね]
愛^2 $= -1$
二股かけたら失敗する

[本質]
2実数を1つに

[基本事項の証明]
複素数の共役と絶対値

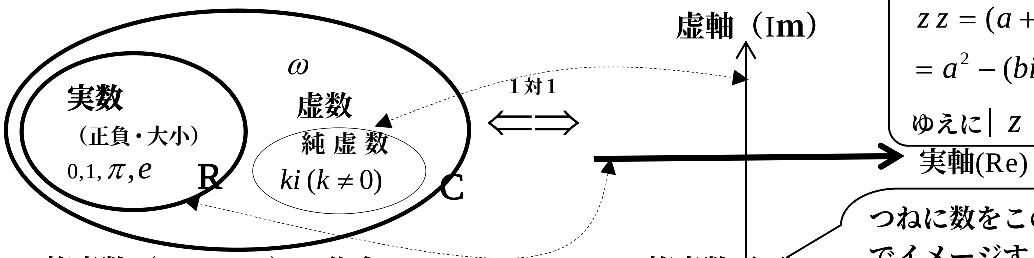
$|z|^2 = a^2 + b^2$

$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$

$= a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$

ゆえに $|z|^2 = z\bar{z}$

（２）数の集合と複素数平面（ガウス平面）を常にイメージせよ



複素数（＋－×÷）の集合　　　　　　複素数平面

小学校から習ってきた数の最終章．すべての数は複素数である

[Quiz]　文字一つで表現される数とその性質は？[答]　π　e　i

c（光の速度）も重要な定数

つねに数をこの平面上でイメージすること
[ガウス(1777～)]
“見えない数を見る複素数平面”

$\pi \overset{def}{=}$ 円周/直径，$\pi^{rad} = 180°, e \overset{def}{=} \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}, i \overset{def}{=} \sqrt{-1}, i^2 = -1, \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$

（３）複素数の３つの顔＋１つ　[超重要][☆☆☆☆☆]　0ri.　　$e^{i\pi} = -1$ に感激（オイラー）

① z, w，α, β，γ，ω（オメガ）　　ω（オメガ）は丸く　w（ダブリュー）ははねる

② $x + yi, u + vi$　，$a + bi, c + di$（x, y, u, v, a, b, c, d は実数）

③ **極形式**　$r(\cos\theta + i\sin\theta)$（絶対値 $r \geq 0$，偏角 $\theta = \arg z$）

偏角は一つの値を求めておけばよい $-\pi < \theta \leq \pi$ に制限したとき主値という

④ [大学] $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　←オイラーの公式

[コツ]複素数の問題はさっさと $x + yi$ にして座標にした方がよいもの，z のままで考えた方が良いもの，極形式にする方がよいものがある

[注意]　$\sin\theta + i\cos\theta$ の極形式は $\cos(90° - \theta) + i\sin(90° - \theta)$

$\cos\theta - i\sin\theta$ の極形式は $\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$|\alpha \pm \beta| = |\alpha| \pm |\beta|$
は一般に不成立
$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$　　$|\bar{z}| = |z|$
$\alpha = \beta \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$
（必要条件）

相等，四則演算（＋－×÷），実数条件，虚数，純虚数，絶対値，偏角実部，虚部，共役，分母の実数化　などの顔による違いに留意

絶対値と共役の性質　[覚え方]共役はオールマイティー

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow |z| = r, \arg z = \theta$

[３つの顔とは]新聞に出ていたＡ君とは９組１３番の山田太郎君のことです

$z = \sqrt{3}i(\cos 30° + i\sin 30°)$　などと<u>混在するのが特徴</u>

$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$
$\overline{\alpha \times \beta} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}$
$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$
絶対値は積商だけだが共役は和差積商すべてに分配できるということ

複素数の計算は３つの顔が混在するのが特徴

複素数 $a + bi$
$\boxed{2\text{次元}}$
座標 (a, b) ⟷ ベクトル (a, b)

$\boxed{3\text{次元}}$は
複素数とは無縁
座標 (a, b, c) ⟷ ベクトル (a, b, c)

（4）[Def.]　相等の定義　$a,b,c,d \in R$ のとき，$a+bi=c+di \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

極形式での相等　$r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta=\theta'+360°k \quad (k\in I) \end{cases}$　注意

（5）[Th.]ド・モアブルの定理（複素数のn乗定理）[超重要][☆☆☆☆☆][旧課程]

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

（nは整数つまり-1,-2,-3,…でも成立）

[難　→　易]

$\boxed{\text{証明}}$も非常によく出題される

数学的帰納法で行う
（nが自然数のときは）

（Ⅰ）$(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos 1\theta+i\sin 1\theta$ /証明/明らか/

（Ⅱ）$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$

$\Rightarrow (\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$

/証明/左辺＝仮定と加法定理利用＝右辺/

[知ッ得] $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$　[類] $R(\theta)^{-1}=R(-\theta)$

複素数でn乗（－1乗，2乗も）
[と言えば]　$(1+i)^2$　α^2　$\dfrac{1}{z}$
→極形式→ド・モアブル

（6）極形式は積商に強い複素数の表現（顔）

① **積商**　$(a+bi)(c+di)$，$\dfrac{c+di}{a+bi}$，$(a+bi)^n$ は複雑

極形式だと $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ のとき

証明は三角関数の加法定理より

積 $zw=rr'\{\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\}$，商 $\dfrac{w}{z}=\dfrac{r}{r'}\{\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')\}$

$re^{i\theta}\cdot r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$（大学で習う），$re^{i\theta}\div r'e^{i\theta'}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

② **絶対値について** $|zw|=|z||w|$，$\left|\dfrac{w}{z}\right|=\dfrac{|w|}{|z|}$

③ **偏角について** $\arg zw=\arg z+\arg w \pmod{2\pi}$

偏角を $0\leq\theta<2\pi$ に限れば $\bmod 2\pi$ は不要

$\arg\dfrac{w}{z}=\arg w-\arg z \pmod{2\pi}$，$\arg z^p=p\arg z$

④ n**乗**　$(a+bi)^n$ は複雑　，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ と単純

[知ッ得][大発見] Ori.
log と arg
は同じ振る舞いだ！
これで楽々理解

$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

$\log_a x^p=p\log_a x$

（オイラーの公式より）

（7）顔による違いに注意

① 実数の表現

・$a+bi$ が実数 $\Leftrightarrow b=0$

・z が実数 $\Leftrightarrow z=\overline{z} \Leftrightarrow z$ は実軸上

・$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が実数

$\Leftrightarrow$ 偏角 $\theta=180°\times k$，　$k\in I$

② 純虚数の表現

・$a+bi$ が純虚数 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

・z が純虚数 $\Leftrightarrow z+\overline{z}=0 \wedge z\neq 0 \Leftrightarrow z$ は虚軸上（原点除く）

・$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が純虚数

$\Leftrightarrow$ 偏角 $\theta=\pm 90°+360°\times k$，$k\in I$

③ 分母の実数化

$\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z\overline{z}}\overline{z}=\dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$

$\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

n 乗の扱いの比較[いろいろ]

実数：2^{30}　（$=10^n$　とおき　対数計算）

虚数：$(1+i)^{30}$（極形式に直しド・モアブルの定理）

行列：A^{30}　（ケーリー・ハミルトンの定理など）

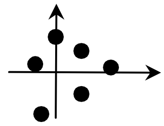
[類]三角関数の次数下げ公式

$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$

（８）複素数の３つのテーマ

テーマ１　方程式（不等式）の根としての複素数（ある条件を満たす複素数）

代数学の基本定理
複素係数の n 次方程式は複素数の範囲に n 個の根(root)をもつ（ガウス）
[覚え方] n には n を、整方程式の解を根という



① **根と係数の関係** $(a \neq 0, a, b, c, d \in C)$

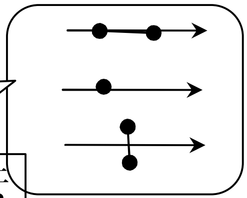
係数と根は連動

$ax^2 + bx + c = 0$ の２根が α, β

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

複素数平面上の実係数の２次方程式の根
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

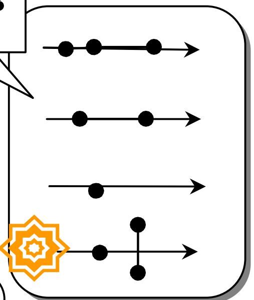


$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の３根が α, β, γ

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

複素数平面上の実係数の３次方程式の根

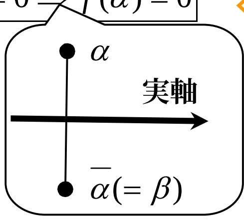


② **実係数の n 次方程式　共役ペアはガウス平面上で実軸対称[重要]**

[超重要]
実係数の整方程式は
$p+qi$ $(p,q \in R, q \neq 0)$
が根なら
$p-qi$ も根である

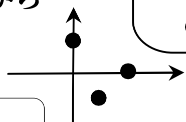
$b^2 - 4ac < 0$　のとき $\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{4ac-b^2}\, i$ と変形

[重要] $f(x)$ が実係数の整式： $f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$



相反方程式 $t = x + \frac{1}{x}$ ，複２次式 $t = x^2$

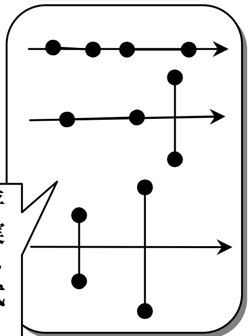
③ **虚数係数の n 次方程式←共役根をもつとは限らず**
実数の根があれば α とおき $A + Bi = 0$ の形から
例 $(x-i)(x-1+i)(x-2) = 0$
　の虚解は実軸対称でない



④ [表現いろいろ][超重要]　α の n 乗根
＝二項方程式＝円周等分方程式=「$z^n = \alpha$」

$\beta^2 = \alpha$　（京大）

複素数平面上の実係数の４次方程式の根



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$(r > 0, 0° \leq \theta < 360°)$ とすると

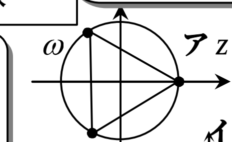
$z^n = \alpha \Leftrightarrow r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = r' & (r, r' > 0) \\ n\theta = \theta' + 360° \times k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{r'} & (r, r' > 0) \\ \theta = \dfrac{\theta'}{n} + \dfrac{360°}{n} \times k \end{cases}$$

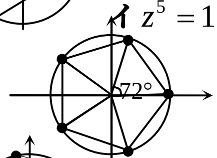
絶対値，偏角が各々別々に求まるのがポイント

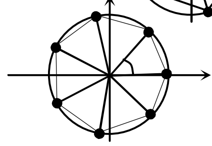
二項方程式
n 乗はド・モアブルの原則
①この顔のまま因数分解→難
② $a+bi$ の顔に→難
③極形式の顔に→成功！

ア $z^3 = 1$



イ $z^5 = 1$





（ア）１の３乗根で虚数の１つを ω（ｵﾒｶﾞ）とすると
[重要] $\boxed{\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0}$ これを**オメガの性質**という
（イ）１の５乗根と正５角形と $72°$
（ウ）１の７乗根と正７角形　　ウ　$z^7 = 1$

⑤ **複素不等式の暗黙の了解　[重要事項]　虚数には大小関係は定義されていない**

$z - \frac{1}{z} < 1$　とあれば　$z - \frac{1}{z}$　は実数であり，$z < 1 + \frac{1}{z}$　と移項すると虚数になりまずい

例 $1 < z + \frac{2}{z} < 2$　を満たす z を図示する問題は $z + \frac{2}{z}$ は１と２の間の実数

複素不等式：
実数条件がポイント
相加相乗は使えません
$\cancel{z + \frac{2}{z} \geq 2\sqrt{z \cdot \frac{2}{z}} = 2\sqrt{2}}$

１．$z = x + yi$ とおき，まず実数条件から x, y を求める
２．$z + \frac{2}{z} = \overline{z + \frac{2}{z}}$　からまず条件を求める

$ax^2 + bx + c = 0$ を
$az^2 + bz + c = 0$ と書かれるとドキッとしませんか
$\alpha^2 = \beta, x^2 = \alpha, z^2 = \alpha$
など文字の使い方に振り回されるな

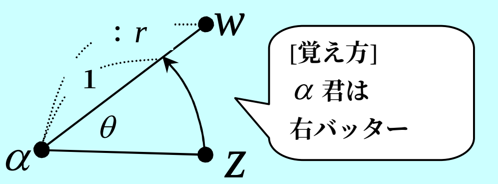
テーマ２ ガウス平面上の点としての複素数[花ﾌﾟﾘ][旧課程]0ri.

[公式] 3点の位置関係（回転と拡大）

[注意] $\dfrac{\alpha - w}{\alpha - z}$ の形のときもある

$$\frac{w-\alpha}{z-\alpha} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff$$

[超重要][☆☆☆☆☆] 3点幾何
α を中心，z から w へは θ の回転と r 倍であると覚える



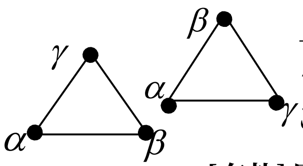
[推奨理由]　$w-\alpha=(z-\alpha)r(\cos\theta+i\sin\theta)$　よりも応用が直接的

$\left|\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}\right|=r$, $\arg\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}=\theta$　とセパレートするとちょっと難しい

[重要]原点中心の回転
$\dfrac{w}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

[と言えば]回転と言えば複素数平面へ、または　１次変換の回転へ

① 正三角形[基本][超重要][頻出]直角三角形，直角２等辺三角形，正方形，正六角形もよく出る



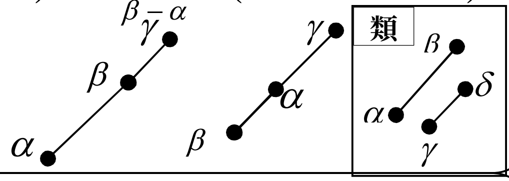
$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$ または $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)$

これを変形して $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$　を得る

[有効]長さで条件をとらえるのに比べて直接的に１式で処理できている

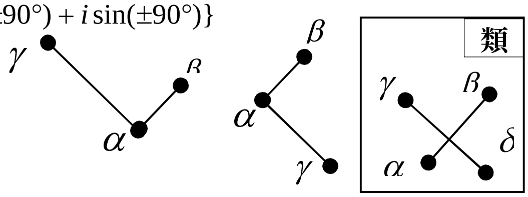
② 一直線上（ベクトルなら易）　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$ または $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$

$\therefore \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数　$\therefore \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$

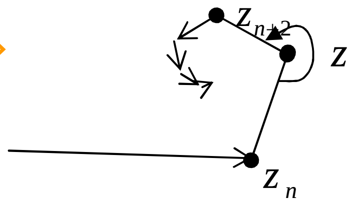


③ 垂直（ベクトルで内積０が易）　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r\{\cos(\pm 90^\circ)+i\sin(\pm 90^\circ)\}$

$\therefore \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数　$\therefore \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=0$



④ スパイラル点列[応用][花プリ]→３点幾何へ

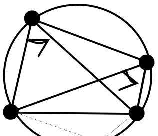


$\dfrac{z_{n+2}-z_{n+1}}{z_n-z_{n+1}}=k(\cos\theta+i\sin\theta)$　より

$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)$ なる α を求め

漸化式へ　（ベクトル的解法も重要）

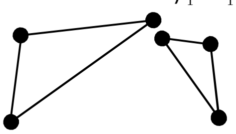
⑤ 同一円周上



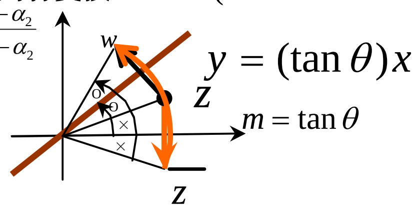
$\iff \dfrac{\gamma_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} : \dfrac{\gamma_2-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}$ が実数 $(\neq 0)$

⑥ 相似

$\Delta\alpha_1\beta_1\gamma_1$ と $\Delta\alpha_2\beta_2\gamma_2$ が同向き相似 $\iff \dfrac{\gamma_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}=\dfrac{\gamma_2-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}$



⑦ 線対称変換　$w=\bar{z}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$



テーマ３　作用素（変換）としての複素数（和積の幾何学的意味）[旧課程] 0ri.

複素変換のパターン分類　パターンによる処理の違いをマスターせよ

z の関係　　　z と w の関係　　　w の関係

元の図形	変換式 $w=f(z)$	後の図形
(x,y)	$\begin{cases} u=\phi(x,y) \\ v=\varphi(x,y) \end{cases}$	(u,v)

変換式のパターン分類　例

①$w=iz+1$　　$w=z^n$

②$w=\dfrac{z}{z-1}$，　$w=\dfrac{1}{z}$

　１次分数変換

③$w=z^2$　　$w=z+\dfrac{1}{z}$

④$w=(z+1)^4$

パターン①　規則性を捉える[☆☆]（反転・スパイラルも重要）

[超重要]和は平行移動　　なぜなら　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$　より

　　　　積は回転と拡大　なぜなら　$zw=rr'\{\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\}$　より

例　$w=zi+1+i$　は　$90°$ の回転の後の $1+i$ 分の平行移動．　$\times i$　は　$90°$ の回転

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\times \omega$　は　$120°$ の回転

パターン②　なくす文字 z と残す文字 w

z を消去，w の関係式を求める　[うまい手]　**z を消去後 $w=u+vi$ の顔で計算**

$|z-\alpha|=r$ から得られる $|z|^2-z\bar{\alpha}-\bar{z}\alpha+|\alpha|^2=r^2$ は，円と覚えておこう

$|w-\alpha|=k|w-\beta|$ は，直線 $(k=1)$ またはアポロニウスの円

例　　円 $|z-\alpha|=r$　$\xrightarrow{w=\frac{z}{z-1}}$　$\begin{cases}\text{円}\\ \text{直線}\end{cases}$

$\alpha=\beta \Rightarrow |\alpha|=|\beta|$
両辺の絶対値をとって z を消す手もある．ただし得た関係は必要条件

[知ッ得]　元の図形に変換式の分母を０にする値・点を含むとき円→直線となる

パターン③　顔を変える[☆☆☆] $z=x+yi$　　$w=u+vi$

作用素としての複素数：和は平行移動・積は回転と拡大

元の図形，変換式，後の図形　とも成分の顔で表す

消す文字は x,y，残す文字は u,v

例　変換式 $w=z^2 \Leftrightarrow u+vi=(x+yi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$

$w=u+vi$ とおけば複素関数 $w=f(z)$ が定義されることは $u=\phi(x,y), v=\varphi(x,y)$ が定義されていることと同値

パターン④　絶対値と偏角をセパレートして考える

例　$w=(z+1)^4$ は③および④の手法は不適．①で規則性を捉える．しかし後の図形の概形は判らない．よって，絶対値 $|w|$ と偏角 $\arg w$ のとる範囲を話題にする

（９）ベクトルと複素数の類似事項と相違事項

直線の方程式　$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$，　$z=\alpha+t\beta$，円の方程式　$|\vec{x}-\vec{c}|=r, |z-\alpha|=r$

分点の公式　　ベクトル $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$，複素数 $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

複素数 $\Leftrightarrow$ 平面（２次元）幾何，ベクトル $\Leftrightarrow$ n 次元幾何

複素数 $a+bi$
２次元
座標 (a,b) ⟷ ベクトル (a,b)

同じ方向の単位ベクトル $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　と　同じ方向の絶対値が１の複素数 $\dfrac{z}{|z|}$

○絶対値の扱いの違い　実数もベクトルも複素数も，差の絶対値は２点間の距離→２乗を計算

複素数 $|z-\alpha|^2=(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}=|z|^2-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+|\alpha|^2$

実数 $|x-y|^2=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=(x+y)^2-4xy$

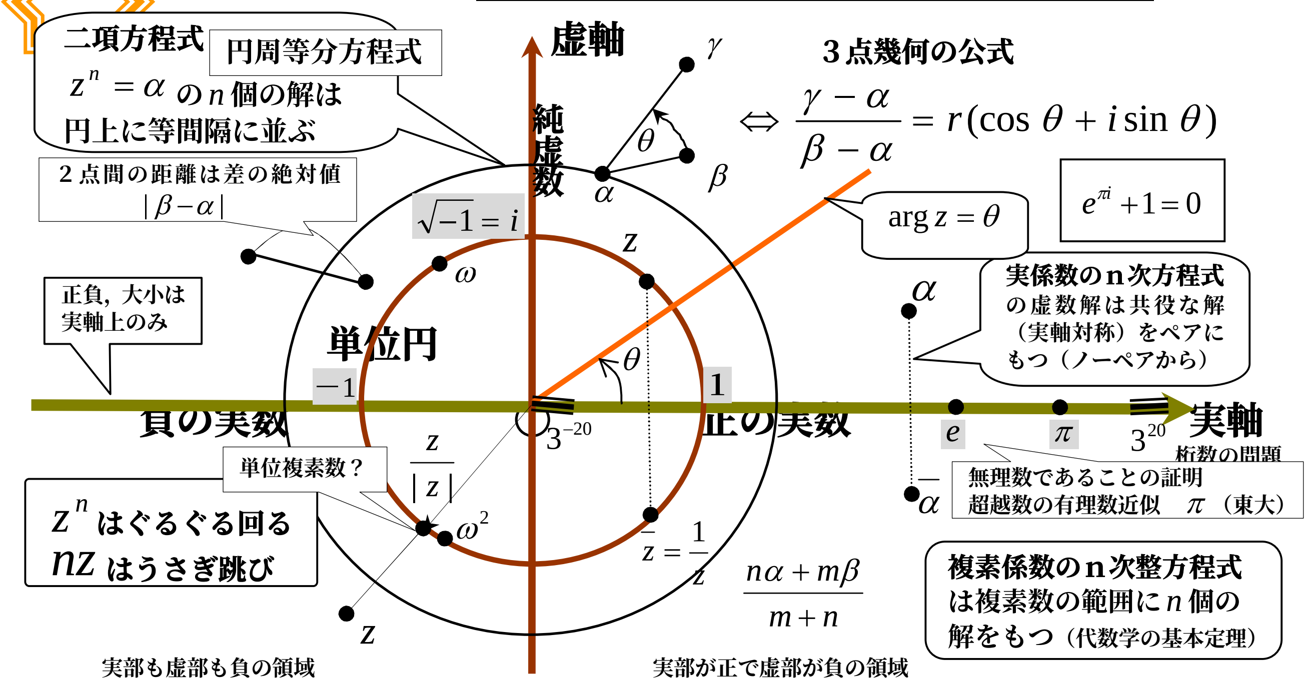
ベクトル $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$|\beta-\alpha|^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ とするのは α,β が実数のときの変形（類似に注意）

[超重要][知ッ得]双方向とも難，顔を変えると意外に容易
$z=x+yi, w=u+vi$

（１０）複素数平面まっぷ

複素数と言えばこのまっぷでイメージすること



見えない数を見る複素数平面　複素数には幾何学的イメージが必要だ

［質問］すべての実数より大きい数、無限大実数∞は数なの数でないの？数ならどこにあるの？

① 複素数平面上の領域

$|z - \alpha| \leqq r$　は，円の内部

$|w - \alpha| \leq k|w - \beta|$ の境界は，直線（$k = 1$）またはアポロニウスの円（$k \neq 1$）

$z + \bar{z} < k$，$z - \bar{z} < k$

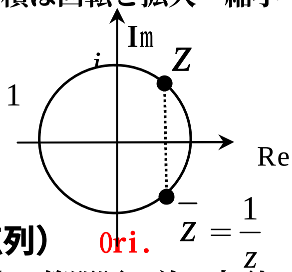
② 和・積の意味と軌跡　$z = \alpha + \beta$　の軌跡($w = z + \beta$)→ 和は平行移動

$z = \alpha\beta$ の軌跡($w = z\beta$) → 積は回転と拡大・縮小

③ 単位円周上の複素数の逆数は共役複素数に等しい

$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$　単位円 $|z| = 1$

よって，このとき　$z + \dfrac{1}{z} = z + \bar{z}$　は実数



［超重要］
虚数解まで考えた解の分離問題　例
・実係数の２次方程式の２解が
$|\alpha| < 1, |\beta| < 1$

・実係数の３次方程式の解が正三角形の頂点　↓
　この平面上
　で考える
整方程式の解を根という

（１１）複素数列・複素数平面上の点列（複素点列）

① **一般項**　**等差複素数列** $z_n = \alpha + (n-1)\beta$ は一直線上に等間隔に並ぶ点列，（和は平行移動）

等比複素数列 $z_n = \alpha \cdot \beta^{n-1}$ は原点中心のスパイラル点列，（積は回転と拡大・縮小）

② **部分和**　$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$　を極形式に表現

することでド・モアブルの定理を用いて三角数列の和の公式を得る

ア．実部を比較して　$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x \cdots + \cos nx =$ 略

イ．虚部を比較して　$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx =$ 略

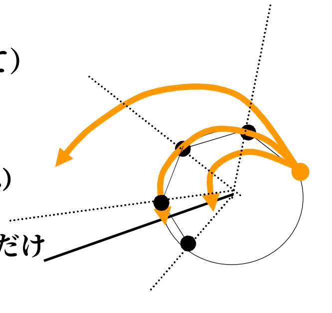
等差×等比　型
$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$
など実数列の話題の複素数列への適用も重要

③ **漸化式**　$z_{n+1} = \alpha\, z_n + \beta$ は重要　（平衡値 γ，$\gamma = \alpha\gamma + \beta$ として）

$z_{n+1} - \gamma = \alpha(z_n - \gamma)$　よって　$z_n = (z_1 - \gamma)\alpha^{n-1} + \gamma$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_{n+1} - \gamma}{z_n - \gamma} = \alpha(= r(\cos\theta + i\sin\theta)) \leftarrow \gamma$ 中心のスパイラル点列（３点幾何へ）

複素数の変換は数の場合の処理の仕方（平衡値）に回転・拡大が加わるだけ



２３ ベクトル

[本質]基底　(正規直交基底)

（１）[Def.] ベクトルとは　大きさと向きを兼ねそなえた量　スカラーは大きさのみの量

[Def.] ベクトルの相等　大きさと向きが共に等しいベクトルは同じとみなす

ベクトルの３つの顔（有向線分→位置ベクトル→成分表示と進化）

①$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OP}$　②$\vec{a}$，$P(\vec{p})$　P は指先 ↗ $\vec{p}$ は指　③(x, y)，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 縦ベクトル

[Def] 演算は和・差・スカラー倍がある．積・商は定義されない．内積，外積はある

（２）２次元（平面ベクトル）と３次元（空間ベクトル）さらに n 次元ベクトルの基底

基本中の基本　基底は２次元（平面ベクトル）は２つ用意 $\vec{a}, \vec{b}$　，３次元（空間ベクトル）は３つ用意

基底　各ベクトルがその１次結合で表されるような１次独立なベクトルの組を基底という　「線形」＝「一次」=linear

[Def.] [理論][定義] $\vec{a}, \vec{b}$ が１次独立 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない

[性質] $\vec{a}, \vec{b}$ が１次独立のとき，$k\vec{a} + l\vec{b} = k'\vec{a} + l'\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} k = k' \\ l = l' \end{cases}$　同一直線上にない

[Def.][定義] $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が１次独立 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は始点を揃えて同一平面上にない

[性質] $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が１次独立のとき　$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = k'\vec{a} + l'\vec{b} + m'\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} k = k' \\ l = l' \\ m = m' \end{cases}$　[意味] １次独立なベクトルによる表現は１通りということ

☆[Def]　単位ベクトル $\overset{def}{=}$ 大きさが1のベクトル　$\boxed{例}$ 同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

ベクトルでの分点の公式　$\dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$　$\dfrac{\text{タスキ掛け}}{\text{比の和}}$　外分は一方に－をつける

（３）ベクトルの３つのテーマ

テーマ１　交点ベクトル問題　[超重要][☆☆☆☆☆][花ﾌﾟﾘ]

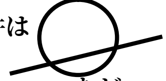
問題文中の“交点 P ”に関わるベクトル $\overrightarrow{OP}$ を求める問題のこと

パターン分類①分線　②垂線　③垂直２等分線　④角の２等分線　⑤空間平面との交点

１次独立性，線分比・面積比・体積比まで問われる

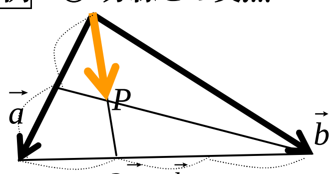
$\overrightarrow{OP} =$（１つの直線・図形に沿って　　）
$\overrightarrow{OP} =$（もう１つの直線・図形に沿って）

[超重要]
交点を作る２つの図形（直線・平面，円・球）のそれぞれに沿って２通りに表す

[新傾向]円・球と直線の交点ベクトル問題が新しい
円上の条件は 
$|\overrightarrow{OP} - \vec{c}| = r$　など

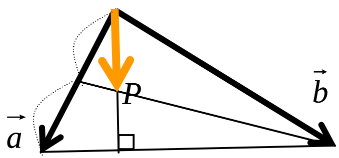
$\boxed{別解}$　メネラウス・チェバの定理を利用

$\boxed{具体例}$　① 分線との交点　② 垂線との交点　③ 垂直二等分線との交点



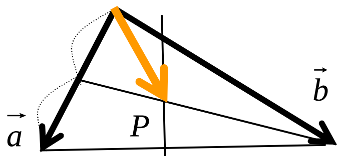
$\overrightarrow{OP} = s\left(\dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}\right)$

$\overrightarrow{OP} = \vec{b} + t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)$



$\overrightarrow{OP} = \vec{b} + t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)$

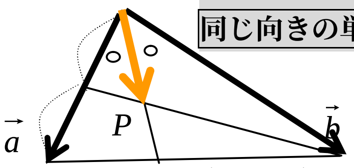
$\overrightarrow{OP} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$



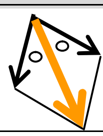
$\overrightarrow{OP} = \vec{b} + t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)$

$\left(\overrightarrow{OP} - \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

④ 角の２等分線との交点



同じ向きの単位ベクトルとひし形



$\overrightarrow{OP} = s\left(\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} + \dfrac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right)$　２辺の比＝底辺比

$\overrightarrow{OP} = \vec{b} + t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)$

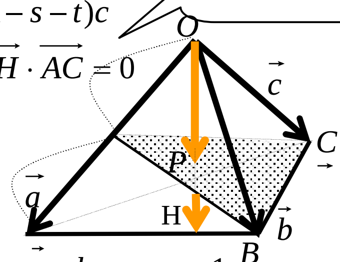
⑤ 空間平面と空間直線の交点

$\overrightarrow{OP} \perp ABC$

$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c}$

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$　$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OH}$



$\overrightarrow{OP} = l\dfrac{1}{2}\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$　$l + m + n = 1$

テーマ２　線型和問題とベクトル方程式　[覚え方]

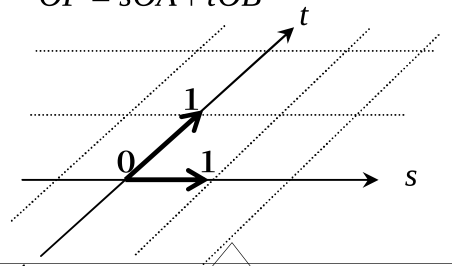
[知ッ得]基底とするベクトル座標（ベクトル方程式）

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$

斜交座標

（$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ を基底とするベクトル座標）

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$



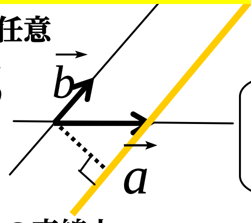
（Ⅰ）$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ は定ベクトル）

（$s,t\in R$）なる点 P の存在範囲を線型和問題という

[コツ] (s,t) だけで領域をイメージすればとても簡単

① $s=1$，t は任意

$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+t\vec{b}$

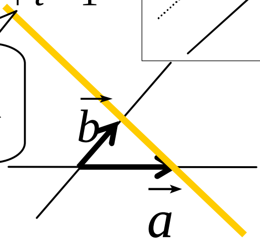


$A(\vec{a})$ を通る

方向ベクトル $\vec{b}$ の直線上

② $s+t=1$

直線 AB 上
平面 ABC 上
は　和＝1



[知ッ得] s,t の条件だけでわかる　斜交座標で考えると楽々

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ を基底に

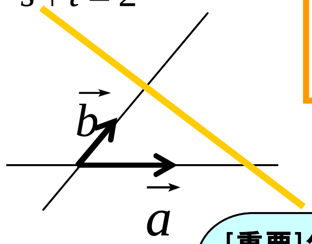
$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ としたら

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ より

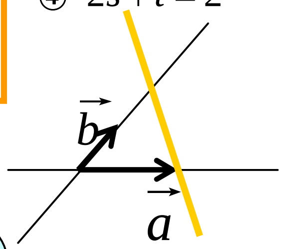
P の座標 $(x,y)=(s,t)$

[覚え方]
直線　和　一
$\vec{p}=s'\vec{\Delta}+t'\vec{O}$
$s'+t'=1$

③ $s+t=2$



④ $2s+t=2$



$|\vec{p}|=|\vec{a}+t\vec{b}|$

の最小値問題は重要

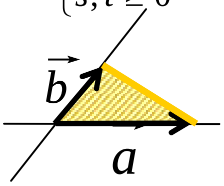
$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ のとき

$|\vec{p}|=|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|$ なら

$\begin{cases}(\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c})\cdot\vec{b}=0\\(\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c})\cdot\vec{c}=0\end{cases}$

のとき，

⑤ $\begin{cases}s+t\le 1\\ s,t\ge 0\end{cases}$



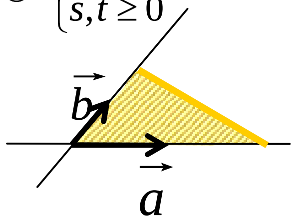
[重要]公式として覚えておくこと

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ の時

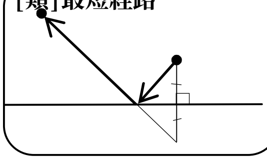
点Pが三角形OABの内部と境界

$\Leftrightarrow\begin{cases}s+t\le 1\\ s,t\ge 0\end{cases}$

⑥ $\begin{cases}s+t\le 2\\ s,t\ge 0\end{cases}$



[類]最短経路



指先の関係

（Ⅱ）図形のベクトル方程式３つの顔を①→②→③→④と進化させていく

① $\overrightarrow{AB}$ の顔で　３点 A,B,C が同一直線上（共線条件）$\Leftrightarrow$ $^{\exists}k:\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

４点 A,B,C,D が同一平面上（共面条件）$\Leftrightarrow$ $^{\exists}s,t:\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

②位置ベクトルの顔で

ア 直線・空間直線のベクトル方程式

１点と方向ベクトル　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$

１点と法線ベクトル　$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

直線 AB　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},s+t=1$

角の２等分線 $\vec{p}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right),t\in R$

円 $|\vec{p}-\vec{c}|=r$ の周上の点 $P(\overrightarrow{p_0})$ に

おける接線は $(\overrightarrow{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

イ 円・球面のベクトル方程式

中心と半径　$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

直径の両端　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

指の関係

アポロニウスの円 $|\vec{p}-\vec{a}|=k|\vec{p}-\vec{b}|,k\ne 1,k>0$

ウ 平面のベクトル方程式

１点と法線ベクトル　$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

１点と平面上の２つのベクトル　$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$

平面 ABC　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c},s+t+u=1$

③さらに成分の顔で表せばベクトル方程式の成分表示

④さらに媒介変数表示，パラメータを消去して普通の方程式　(x,y,z)の関係式　を得る（略）

テーマ３　計量の問題（長さ＝大きさ，角度）　[超重要][☆☆☆☆☆][覚え方]

計る量といっても定規と分度器で計るものだけ

内積はベクトルの大きさとなす角度で定義される量であり，ベクトルに計量を導入します．

①[重要][Def.]２つのベクトルのなす角 $\theta \overset{def}{=}$ 始点を同じ所にもってきて計かった小さい方の角

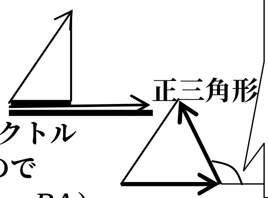
[Def.] $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積　$\vec{a}\cdot\vec{b} \overset{def}{=} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　$(\in R)$　$0° \le \theta \le 180°$

[Def.][注意]
ベクトルのなす角 θ は始点を同じところに持ってきて計った小さい方の角と定義されている．
よってこのベクトルのなす角は６０度ではなく１２０度

内積も３つの顔で $\boxed{1}$ 有効線分 $\boxed{2}$ $\vec{a},\vec{b}$ $\boxed{3}$ 成分（$\boxed{1}$ 内積の幾何的意味も知っておく）

$\boxed{3}$ 成分の顔では，２次元　$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \in R$

３次元　$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \in R$



[注意]　内積はベクトルではないスカラー（実数），外積はベクトル
[ベクトルの内積の計算]は交換法則・分配法則等が成り立つので
ふつうの文字と同じような計算になる（行列の積は一般に $AB \ne BA$）

例　$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2|\vec{b}|^2$

・を忘れずに

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\{|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\}$ これで内積を定義することも

②大きさ[といえば]
→大きさの２乗
→それ自身の内積

②大きさ $|\vec{a}|$ といえば，　$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1{}^2 + a_2{}^2$

↓３次元の成分のとき
$= a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$

③角度[といえば]
→角のコサイン
→大きさ×大きさぶんの内積

③なす角 θ といえば，　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$　ただし，$0° \le \theta \le 180°$ ←ベクトルのなす角の定義から

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}$$ ←３次元成分のとき

④垂直条件　$\vec{a} \ne \vec{0}$，$\vec{b} \ne \vec{0}$ のとき

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

３次元の成分のとき
$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

④垂直[といえば]
→内積ゼロ
$m\cdot m' = -1$ と混乱しない

（５）いろいろな話題

①　ベクトルによる三角形の面積の公式

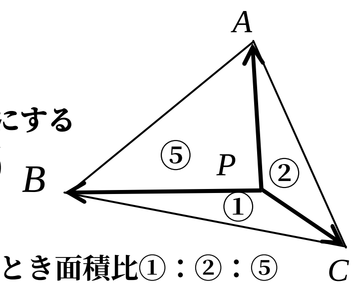
[超重要]特に空間の３点でできる三角形　$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$　　証明も頻出

②　同一点の証明は位置ベクトルが一致することを示す

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$　ならば　$P = Q = R$

③　加重心の問題　は位置ベクトルの顔で，Oを始点またはAを始点にする

（ア）$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \vec{0}$　$\Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{p}) + 2(\vec{b}-\vec{p}) + 5(\vec{c}-\vec{p}) = \vec{0}$



$\Leftrightarrow \vec{p} = \dfrac{\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}}{8} = \dfrac{\vec{a}+7\dfrac{2\vec{b}+5\vec{c}}{7}}{1+7}$ より P の位置が判明．このとき面積比①：②：⑤

（イ）$k\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = (k-1)\overrightarrow{PC}$ なる点 P の位置も同様の変形が有効　　「$\vec{a} = \vec{0}$ とするのもよい」

$\Leftrightarrow k(\vec{p}-\vec{a}) + 3(\vec{p}-\vec{b}) = (k-1)(\vec{c}-\vec{p}) \Leftrightarrow \vec{p} = \cdots\cdots$　k によって位置を場合分け

[知ッ得] $a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} = \vec{0}$　のとき、$\Delta PBC : \Delta PCA : \Delta PAB$ の面積比は $a : b : c$

（6）空間ベクトルの話題

Ori.

２次元は次元が低すぎ一般が見えないが，３次元まで考えると n 次元（大学で）が見えてくるよ．スゴイ

① **３次元（空間ベクトル）は３つ用意** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，　**成分は** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と縦ベクトル表示が見やすい

② **分点の公式** $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$　$\dfrac{\text{タスキ掛け}}{\text{比の和}}$　$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n},\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$ 外分は一方にーをつける

② **[Def.]** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **が１次独立** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{c}\neq\vec{0},\vec{a}$ **と** $\vec{b}$ **と** $\vec{c}$ **は始点を揃えて同一平面上にない**

[性質]

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が１次独立のとき
$\vec{p}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$ の表現は
１通りである[証明も重要]

[別表現] $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **が１次独立のとき**(これで定義とすることもある)

$$k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=k'\vec{a}+l'\vec{b}+m'\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}k=k'\\ l=l'\\ m=m'\end{cases}$$

③ **共線条件[超重要]**　**３点** A,B,P **が同一直線上**　　[類]共円条件⇔$\boxed{\text{円周角の定理の逆など}}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{{}^{\exists}k:\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}}$ ←指先の関係

[納得]
指先と指の関係で違いを

$\Leftrightarrow$ $\vec{p}=\vec{a}+k(\vec{b}-\vec{a})$←指の関係

$\Leftrightarrow$ $\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad(s+t=1)}$←指の関係

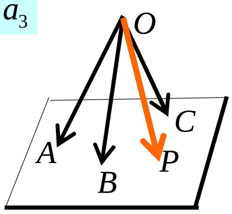
直線上の点は１点と方向ベクトルで媒介変数表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3-a_3}$←空間直線の方程式

平面から空間へ
三角形と四面体
円　　と　球面
直線と空間直線
直線と平面
１点と直線の距離
１点と平面の距離
面積　と体積
法線　と　外積
共線と共面の条件

④ **共面条件[超重要]**　**４点** A,B,C,P **が同一平面上**



$\Leftrightarrow$ $\boxed{{}^{\exists}s,t:\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}$ ←指先の関係

$\Leftrightarrow$ $\vec{p}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$　←指の関係↓

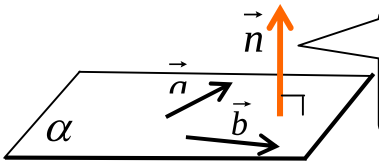
$\Leftrightarrow$ $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{p}=u\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad(u+s+t=1)}$

[参] $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0\Leftrightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$←空間平面の方程式

⑤ **[Def.]ベクトルが平面に垂直**　，**平面に垂直なベクトルの表現**

α 上の１次独立な　$\vec{a},\vec{b}$ に対し

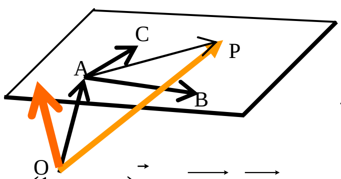
（難）$\vec{n}\perp\alpha\overset{def}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$（易）

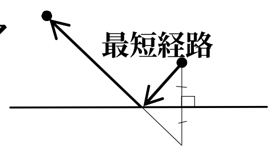


[Def.]平面に垂直とは
平面上の１次独立な２つのベクトルと垂直であること
で定義される

$\boxed{\text{応用例}}$　キーワードは“最短＝垂直”

$|\vec{p}|=|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|$ の最小値問題





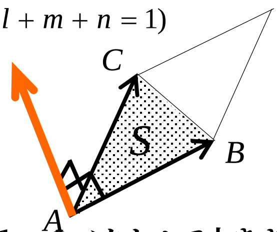
⑥ **空間直線と空間平面との交点ベクトル問題**

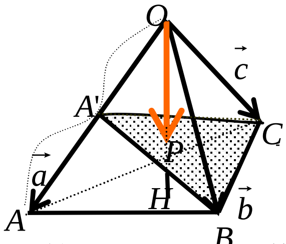
$\boxed{\text{例}}$垂線 OH と平面 $A'BC$ の交点 P　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ ，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OH}$　，　$\overrightarrow{OP}=l\dfrac{1}{2}\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　$(l+m+n=1)$

⑦ **空間における三角形** ABC **の面積** S

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$





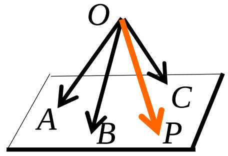
[知ッ得] $S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ ，外積は $\vec{a},\vec{b}$ に垂直な１つのベクトルで大きさは平行四辺形の面積に等しい

⑧ **空間での線形和問題**　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$（$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ は同一平面上にないとする）

点 P が平面 ABC 上 $\Leftrightarrow\ \alpha+\beta+\gamma=1$

点 P が△ ABC の内部 $\Leftrightarrow\ \alpha+\beta+\gamma=1,\alpha\geqq0,\beta\geqq0,\gamma\geqq0$

点 P が三角錐 $OABC$ の内部と境界 $\Leftrightarrow\ \alpha+\beta+\gamma\leqq1,\ \alpha\geqq0,\beta\geqq0,\gamma\geqq0$



⑨ **[Def.]ベクトルの外積**　$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ のとき

[知ッ得] $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積　$\vec{a}\times\vec{b}\overset{def}{=}(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\in V$

[類]組み立て除法もこんな感じで楽する方法でした

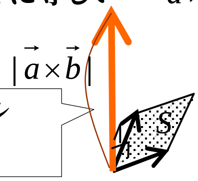
例

x	y	z	x
1	0	2	1
×	×	×	
1	1	0	1
1	*−2*	*2*	

［性質］平行四辺形の面積は外積の長さに等しい　$\vec{a}\times\vec{b}$

空間における面積の公式　$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

・外積は２つのベクトルに垂直なベクトル
・内積はスカラーだが外積はベクトル

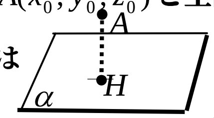


・$\vec{a}=(1,0,2),\vec{b}=(1,1,0)$ に垂直なベクトルの１つも，$\vec{a}\times\vec{b}=(-2,2,1)$ と上記のようにすぐに求まる

・$\vec{a}=(1,2)$ に垂直なベクトルの１つは $(-2,1)$ ←これは簡単に即わかる

⑩ **[公式] １点 $A(x_0,y_0,z_0)$ と空間平面 $\alpha:ax+by+cz+d=0$**

との距離は



$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

垂線の足 H を求めることも重要

空間図形の方程式

[図形を決定する２つの要素を捉える]

☆媒介変数表示は超重要[☆☆☆]

直線は，１点と方向ベクトルを追え

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ より

☆ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+lt\\y_1+mt\\z_1+nt\end{pmatrix}$

$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}(=t)$

平面は，１点と法線ベクトルを追え

$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ より

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

$\vec{x}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$ より

☆ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\ \\\ \\\ \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\ \\\ \\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \\\ \\\ \end{pmatrix}$

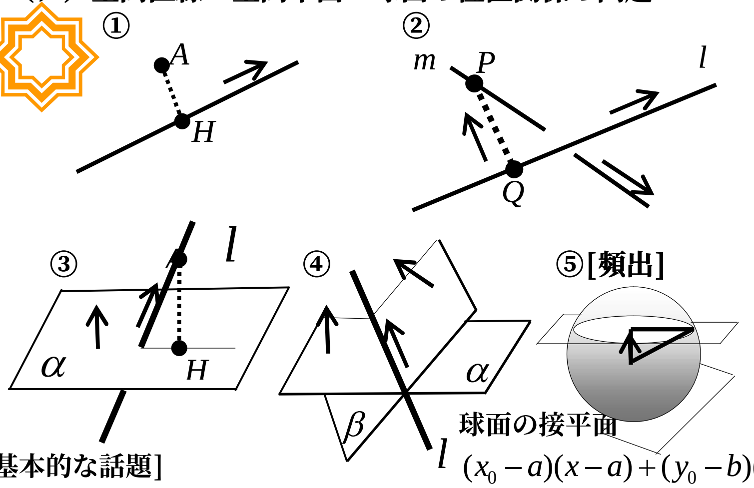
球面は，中心と半径を追え

$|\vec{p}-\vec{c}|=r\quad(r>0)$ より

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

（７）空間図形

（ア）空間直線・空間平面・球面の位置関係の問題

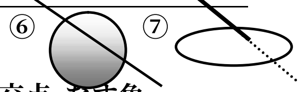


球面の接平面

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=r^2$

[基本的な話題]

①　１点と直線との距離，垂線の足
②　ねじれの位置にある２直線の最短距離，２直線のなす角
③　１点と平面との距離（公式あり），垂線の足，直線と平面との交点，なす角
④　２平面の交線，なす角　⑤　球面と平面の交円→３平方の定理へ[最頻出]

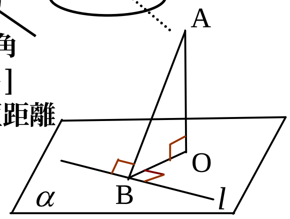


[応用] ３直線に接する球面　直線と平面に接する球面　平面状の円と直線との最短距離

（イ）[Ｔｈ.] ３垂線の定理　平面 α 外の定点 A と α 上の直線 l に対し

$(AO\perp\alpha)\wedge(AB\perp l)\Rightarrow OB\perp l$ ，$(AO\perp\alpha)\wedge(OB\perp l)\Rightarrow AB\perp l$

$(AB\perp l)\wedge(BO\perp l)\wedge(AO\perp OB)\Rightarrow AO\perp\alpha$



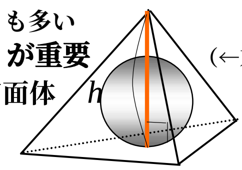
[知ッ得]　対称性や３平方の定理で解けることも多い

（ウ）特に四面体（空間の最も単純な図形）が重要

一般四面体　等面四面体（各面が合同）等積四面体

正四面体　３直角四面体　直稜四面体

三角形にいろいろあるように四面体にもいろいろある



$V=\dfrac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+S_4)$

（←京大でよく出る）

（四面体の内接球の半径 r ）

（垂線の長さ h ）←高さ＝体積/底面積

２４ 行列と１次変換

行列（matrix）←[暗黙の了解]高校では実行列つまり成分は実数とする

一般と２×２行列限定（逆行列の公式，ケーリー・ハミルトンの定理）を意識せよ．３×３型もテストに出る

（１）顔は２つ① $A, B, C, \cdots, E, O, X, Y$（アルファベットの大文字）② $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ など成分での表示

[Def.]相等の定義「$A=B \overset{def}{\Leftrightarrow}$ 各成分がすべて等しい」つまり「$(a_{ij})=(b_{ij}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall i, j; a_{ij}=b_{ij}$」

（２）[Def.]和・差・スカラー倍の定義は各成分ごとの和差・スカラー倍で自然に定義する

積の定義[Start]

[覚え方]ヨコタテ・ヨコタテ・ヨコタテ

積は変な定義だなと認識せよ（諸悪の根源ここにあり）

行列の積は AB と書く $A \cdot B$ $A \times B$ とは書かない

[本質]
ヨコタテ
ヨコタテ

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} ax+bp+cs & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \quad 等$$

（３）性質[超重要][☆☆☆]

行列の積の奇妙な定義により生じる奇妙な性質

①一般的に行列の積は交換法則が成り立たない（えっ！）

一般に $AB \neq BA$　任意の行列（３×３）と交換可能な行列は？

$(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$ など展開・因数分解の公式は使えない．しかし $AE=EA$ だから，E となら展開・因数分解の公式は使える

②一般的に零因子（ゼロいんし）は存在する（ん？）

“ $AB=O \to A=O$ または $B=O$ ”
は一般には成り立たない

$(A-E)(A-2E)=O$
$\therefore A=E, 2E$
とはできない

[注意] $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　（誤）
$(AB)^2=A^2B^2$　（誤）
など一般に成り立たない．
交換法則が成り立たない演算のときの
合成の逆　$(f \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$
[覚え方]靴下を履いてから靴を履くの
逆は靴を脱いでから靴下を脱ぐ

（４）[Def.]逆行列の定義[理論][重要]

$AB=BA=E$ なる B（存在するとは限らない）

を A の逆行列といい，このとき B を A^{-1} とかく（エーインバースとよむ）

自ずと正方行列に対しての概念になる　（一般に１つの元 A の逆は，A と結合したとき単位元を生ずる元である）

（５）逆行列の性質 ①$(A^{-1})^{-1}=A$

②積の逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在するとき $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$（公式）

③２×２行列の逆行列の公式[重要]

特に $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，A^{-1} は

$\boxed{(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1} \text{ に注意}}$

$ad-bc \neq 0$ のとき存在して A^{-1}（エーインバース）$=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である（２次限定）

行列式の値　$ad-bc$ は，Δ（デルタ），$\det(A)$，$|A|$　などで表される

[参考] $A(a,b)$, $B(c,d)$, $S=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ は平行四辺形 OACB の符号付面積

④[重要公式] ２×２型が逆行列が存在しない $\Leftrightarrow \Delta=ad-bc=0$

逆行列が存在する $\Leftrightarrow \Delta=ad-bc \neq 0$

人間の２大分類は男と女
[超重要]正方行列の２大分類は正則と非正則

正則
＝逆行列があるもの
A^{-1} を利用
両辺に右（左）からかけて次数下げ

非正則
＝逆行列がないもの
２次なら $ad-bc=0$
よりＣ・Ｈの定理より
$A^2=(a+d)A$
を利用次数下げ。
$A^n=(a+d)^{n-1}A$

（６）[Th.]２×２行列のケーリー・ハミルトン（C.H.）の次数下げ定理

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad （２次限定）$$

注意　同値ではない，一方通行　反例 $A=\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

・[定理の意味] ２×２正方行列の２乗は１次で表現できるつまり行列の多項式には次数の概念は基本的にない．
[使い方] $A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$　難→易　積の部分がなくなるとベクトル空間との類似の公式が成り立つ

・さらに，逆行列が存在しないときは $ad-bc=0$ より $A^2=(a+d)A$

・２×２の正方行列の n 次整方程式は１次の行列方程式に帰着される $aA=kE$

[類似] $x=1+\sqrt{2}\,i$ のとき
$(x-1)^2=-2$　$x^2-2x+3=0$

・[一般的にはどうなるの]　A：n次の正方行列 $\Rightarrow$ $A^2-tr(A)A+\det(A)E=O$

（7）行列の３つのテーマ

行列は逆行列が①存在するものと（正則）　②存在しないもの(非正則)に大別されます．人間は男と女に大別

テーマ１　変な積の定義の世界の性質[花プリ]

①一般に交換法則は成り立たない．「両辺に右からかけて」「両辺に左からかけて」

②零因子は存在する．「◇□$=O$ から◇$=O$ または□$=O$　とはできない」

③◇$^{-1}$=□ の証明は，◇□$=E$ を示す（逆の定義より）

◇は逆行列をもつことの証明は，（　　　）◇＝Ｅを示す．２次なら行列式の値$\Delta \neq 0$をいう．

◇は逆行列をもたないことの証明は，もつと仮定すれば矛盾することをいう．２次なら$\Delta = 0$をいう．

[質問]　□◇$=E$ も示さなくていいの？[答]左逆元は右逆元が証明されていますのでよろしい

テーマ２　変な積と行列方程式[いろいろ][花ﾌﾟﾘ]

文字の使い方の不統一が難しくしている
$A^2-2A-3E=O$ と A を使っている
数方程式 $x^3=1, x^2-2x-3=0$ と比較せよ

$pX=qE$，$AX=B$，$AX=O$，$A\vec{x}=\vec{b}$，$A\vec{x}=\vec{0}$

$X^2=O$, $X^2=E$, $X^2=X$, $X^2+X-2E=O$ をみたす X , x は？　**行列漸化式にも要注意**

例 $A^2=E$ なる２×２型行列を求めよ
当然すべて求めよ

$$\begin{cases} A^2=E \\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2=E \\ A^2=(a+d)A-(ad-bc)E \end{cases} \Rightarrow (a+d)A-(ad-bc)E=E$$

解１ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくならば，$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$ ←ケーリー・ハミルトンの次数下げ定理７

$X^2=E$ の方が方程式らしいのに！ $X=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$

$A^2=E$ より $(a+d)A-(ad-bc)E=E$

$\therefore (a+d)A=(ad-bc+1)E$ ←１次の行列方程式に帰着（⟸必要条件）　実は必要十分（同値）である

（ア）$a+d\neq 0$ のときは　$A=\dfrac{ad-bc+1}{a+d}E=kE$ の形

このとき $A^2=E$ に代入して $k^2E=E$　$\therefore k=\pm1$　$\therefore A=\pm E$

十分性のチェック

行列で　$pX=qE$ のときの X は
(ｱ) $p\neq 0$ のとき $X=\dfrac{q}{p}E=kE$ の形
(ｲ) $p=0$のとき $0X=qE$ $\therefore q=0$ なる X

（イ）$a+d=0$ のときは，$0A=(ad-bc+1)E$　$\therefore ad-bc+1=0$

このとき，$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$ に代入すると $A^2=E$ を得る

十分性のチェック　故に $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ すべて

[コツ]行列の計算は次数を下げ，すべてを成分とせずに丸ごと部分を有効に活用せよ（ｹｰﾘｰとﾊﾐﾙﾄﾝより）

（ア）（イ）合わせて，

解は無限にあるんだ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=E$ の解である **終**

イ）$A=\begin{pmatrix} t & b \\ c & -t \end{pmatrix}$ としても良い
$bc=1-t^2$

［２つの間違い］（ア）（誤）$A^2=E$ から $(A+E)(A-E)=O$　$\therefore A=-E,E$　[修正法]［ア）$A=kE$ の時と

（イ）（誤）$A^2=E$ から $A^2+0A-1E=O$，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ イ）$A\neq kE$ の時に分ける］

と係数比較して $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ すべて

行列の計算　どの顔で処理するか
① A,B,C の顔で→易あるいは難　②すべて成分で→易あるいは難③ミックスで　C．H の次数下げ定理で1次に　④回転･拡大と見抜きsin　cos にする
③④は理論的についていけない人も
[類]複素数の二項方程式 $z^n=\alpha$ はド･モアブルの次数下げ定理利用

解２成分で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 & ① \\ (a+d)b=0 & ② \\ (a+d)c=0 & ③ \\ bc+d^2=1 & ④ \end{cases}$$

②③から　ア．$a+d=0$ のとき②③は満たされ，
①④から $ad-bc=-1$
イ．$a+d\neq 0$ のとき②③から $b=0, c=0$
さらに①④から $a=\pm1, d=\pm1$（複号同順）

ア．イから同様の結果を得る．

困ったことだ行列方程式を満たす行列をすべて求めなさいと問わずにそのものの $a+d$ と $ad-bc$ を求めよと聞いてくる．

例 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=E$ を満たすとき

$a+d$（トレース）と $ad-bc$（行列式の値）を求めよなら，解をまず求めてから
（$a+d$，$ad-bc$）$=(2,1),(-2,1),(0,-1)$

テーマ３　変な積の定義の世界のｎ乗（ 行列のｎ乗問題）[パターン分類][いろいろ][花ﾌﾟﾘ]

① C.H. の定理を利用，数列の隣接３項間の手法へ

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

$$\Rightarrow A^{n+2}-(a+d)A^{n+1}+(ad-bc)A^n=O$$

さらに $X_n=A^n$ として $X_{n+2}-(a+d)X_{n+1}+(ad-bc)X_n=O$　を数列の隣接３項間の要領で解く

（２次の）非正則行列のｎ乗は簡単
ＣＨ定理より　$A^2=(a+d)A$
よって　$A^n=(a+d)^{n-1}A$

② 対角化して n 乗計算　*（n 次の正方行列が対角化可能⇔n 個の一次独立な固有ベクトルをもつ）*

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ←このようにする P を A の*対角化行列*という

より $(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ よって $A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$ と求まる

基本の n 乗（易）に帰着させる
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ は証明不要
$\begin{pmatrix} a & k \\ 0 & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & nka^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ は証明要

$B=P^{-1}AP$　とおくと　$B^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^nP$　$\therefore A^n=PB^nP^{-1}$

[関連]　固有値と固有ベクトル，固有方程式，対角化行列，１次変換 $f(\vec{x})=A\vec{x}$

[理論] $A\vec{x}=\lambda\vec{x}, (\vec{x}\neq\vec{0})$ を満たすとき，$\vec{x}$ を A の固有ベクトル，λ を A の固有値という

実は A の固有ベクトルを用いて $P=\begin{pmatrix} \vec{x_1} & \vec{x_2} \end{pmatrix}$ である

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}(\vec{x}\neq\vec{0})$ の λ_1,λ_2 で
$A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda_1{}^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　$A^n\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\lambda_2{}^n\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
としてこれを束ね（１つの式で表す）
$A^n\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n x & \lambda_2{}^n u \\ \lambda_1{}^n y & \lambda_2{}^n v \end{pmatrix}$
逆行列を右から掛け，n 乗が求まる

③ 直和分解（ちょくわぶんかい）して n 乗（交換,O,E,ベキ等になる塊と二項定理を利用）
スペクトル分解　射影分解ともいう　[重要]

例 A を $A=\alpha P+\beta Q$（$PQ=QP=O, P^n=P, Q^n=Q$）

の形にできれば $A^n=(\alpha P+\beta Q)^n=\cdots\cdots=\alpha^nP+\beta^nQ$ と求まる

④ 多項式の割り算を利用（次数下げをケーリー･ハミルトンの定理で行う）

固有方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ で割って

$x^n=\{x^2-(a+d)x+(ad-bc)\}Q(x)+px+q$　であることから

$A^n=\{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E\}Q(A)+pA+qE=pA+qE$ となる

[類] $x=1-\sqrt{2}$ のとき
$x^5-3x^4+x+3=?$
$x^2-2x-1=0$ 利用

⑤ 数列の漸化式を利用
連立漸化式→３項間漸化式→特性根利用

⑥ 帰納的方法（予想し数学的帰納法で証明）

⑦ $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$　とおき $A^{n+1}=AA^n=A^nA$

を利用して成分の漸化式を作る

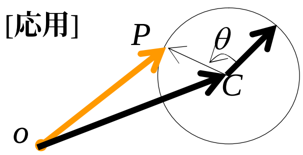
⑧ 回転の行列のｎ乗の公式

$\{R(\theta)\}^n=R(n\theta)$　つまり

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$ ←回転

[回転といえば]
$\vec{u}=(x,y)$ を原点中心に θ だけ
回転した $\vec{u}'=(x',y')$
$\Leftrightarrow x'+y'i=(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

[応用]



$\vec{u}=(x,y)$
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\vec{u}'$

⑨ 行列の形に応じた出題者の誘導に従う問題

⑩ 行列列の和　$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1}=(E-A)^{-1}(E-A^n)$　if　$^\exists(E-A)^{-1}$

証
$S=E+A+A^2+A^3+\cdots+A^{n-1}$
$AS=A+A^2+A^3+\cdots+A^n$，$(E-A)S=E-A^n$，$S=(E-A)^{-1}(E-A^n)$　$if\ ^\exists(E-A)^{-1}$

[類]実数 $1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$　$(x\neq1)$ 複素数 $1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{n-1}=\dfrac{1-z^n}{1-z}$　$(z\neq1)$

極形式から三角数列の和を得る

（8）１次変換(Linear Transformation)　*対応→写像→変換→１次変換*　[新課程]

①[Def]　$f: V \to V$ が１次変換　[いろいろ]

$\overset{def}{\Leftrightarrow}\ f(\vec{x}) = A\vec{x} \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \overset{def}{\Leftrightarrow} f : A$

> A を２次の正方行列とし
> $f(\vec{x}) = A\vec{x}$
> を１次変換という

②性質　原点は原点にうつる $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，基本ベクトルの像 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

重要

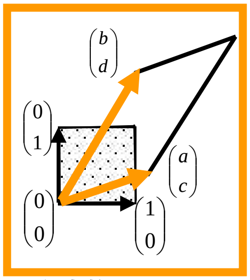
１次変換の線形性［理論］[重要]　$f(\vec{x}) = A\vec{x} \Leftrightarrow f(k\vec{x}) = kf(\vec{x}) \wedge f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

点，直線，円，放物線，２次曲線，領域など

（x，y）系　$\xrightarrow{f\ :\ A}$　（x'，y'）系

元の図形　*変換式*　*後の図形*

> [わかった！]一般に一次変換で点 (x, y) は
> $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
> の像を基底とするベクトル座標（斜交座標）
> に対応する点 (x', y') に移る



合成，逆　$f : A$，$g : B$ とすると合成変換 $f \circ g : AB$，逆変換 $f^{-1} : A^{-1}$

合成の逆　$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$　**逆の逆**　$(f^{-1})^{-1} = f$：$(A^{-1})^{-1} = A$

③　１次変換の例　恒等変換 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，対称移動 x 軸：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$y$ 軸：$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

原点：$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$y = x$：$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$y = -x$：$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，相似変換（拡大・縮小）$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$

直線 $y = mx$ に関する線対称移動，原点中心の回転は特に重要な１次変換である

[注意]一般の点対称変換，原点を通らない直線対称移動，平行移動 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ などは1次変換ではない

④１次変換のパターン分類[花プリ]　$\boxed{\text{元の図形}}$ $\boxed{\text{変換式}}$ $\boxed{\text{後の図形}}$ の２つから，残りの１つを決定する問題

$\boxed{\text{ア}}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ $\neq O$ 非正則変換，「全平面 $E \to$ 直線 l'：$y = kx$」，「直線 $l \to$ 直線 l'：$y = kx$ or １点」，

重要

$\boxed{\text{イ}}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$(ad - bc \neq 0)$「全平面 $E \to$ 全平面 E」
　　正則変換「直線 l　→　直線 l'」

> [超重要]１次変換の２大分類は正則変換と非正則変換

> [重要テーマ]変わるとき，変わらないものを捉える
> 不動点と不動直線の問題
> 線型性より直線の像は１点と方向ベクトルを追え
> $\vec{x}' = f(\vec{x}) = f(\vec{a} + t\vec{u}) = f(\vec{a}) + tf(\vec{u}) = \vec{a}' + t\vec{u}'$

$\boxed{\text{ウ}}$ $R(\theta)$：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 原点中心の角 θ の回転
　[覚え方]sin に差が in

重要　$R(\alpha + \beta) = R(\alpha) \circ R(\beta)$：$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

$\{R(\theta)\}^n = R(n\theta)$：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$，[知ッ得] $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

重要

$\boxed{\text{エ}}$ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\left(\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ ←原点中心の回転と拡大の合成

$\boxed{\text{オ}}$ $y = mx$，$(m = \tan\theta)$ に関する線対称変換＝x 軸対称と回転移動の合成で

重要　$R(\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}R(-\theta)$，or，$R(2\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$

> 有理関数化する
> $\tan\theta = m$ の時
> $\cos 2\theta = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$
> $\sin 2\theta = \dfrac{2m}{1+m^2}$

$\boxed{\text{カ}}$ $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ 型は連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$ に対応　[原則/重要]和と差を作る

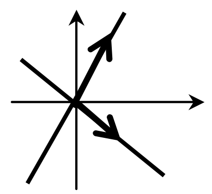
⑤様々な１次変換　等角変換，等長変換，合同変換，相似変換

⑥束ねる公式　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & u' \\ y' & v' \end{pmatrix}$

⑦固有値と固有ベクトルの理論[花プリ] *変わる世界は変わらないものを追う*

[Def.] $A\vec{x} = k\vec{x}$　$(\vec{x} \neq \vec{0})$ を満たす $\vec{x}$ を行列 A の固有ベクトル，k を固有値という

不動直線，固有ベクトルのイメージ



（9）１次変換で作られる点列の問題

◆ $\boxed{\text{問題}}$ （京大）$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n = 0,1,2,3,\cdots)$ において

$n \geq 3$ のある $n = m$ で初めて $\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるなら $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m = E$ を証明せよ。

「３回目で０以外の点列がリセットするなら　３乗で行列がリセットされるものに限る」

$\boxed{\text{解}}$ $\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$・①, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$・②

①　②を束ねて $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}$ ここで $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}^{-1}$ が存在すること・・③

が示せたらそれを右からかけて $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m = E$ を得る

<u>③の証明</u>　背理法で証明する　$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}^{-1}$ が存在しないと仮定すると　$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = k^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$　，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = k^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　だから $k^m = 1$ より $k = \pm 1$

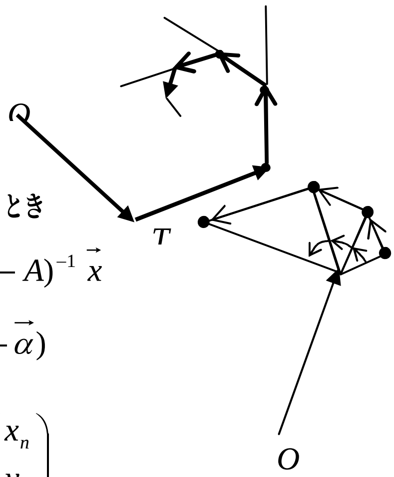
このとき $k^2 = 1$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ これは $n \geq 3$ のある $n = m$ で初めて $\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ に矛盾する

$\boxed{\text{終}}$

◆ 回転と拡大の合成の繰り返し　スパイラル点列とその極限

・$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$　原点を中心とする回転と拡大の合成の繰り返し

・$\begin{pmatrix} x_{n+1} - p \\ y_{n+1} - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n - p \\ y_n - q \end{pmatrix}$　(p, q) を中心とする回転と拡大の合成の繰り返し



・$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$

$= \overrightarrow{OT} + E\vec{x} + A\vec{x} + A^2\vec{x} + A^3\vec{x} + \cdots + A^{n-1}\vec{x}$

$= \overrightarrow{OT} + (E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1})\vec{x}$

$= \overrightarrow{OT} + (E - A)^{-1}(E - A^n)\vec{x}$　，$(E - A)^{-1}$ が存在するとき

$= \overrightarrow{OT} + (E - A)^{-1}((E - \{\frac{1}{2}R(45°)\}^n))\vec{x} \to \overrightarrow{OT} + (E - A)^{-1}\vec{x}$

・$\vec{x}_{n+1} - \vec{\alpha} = kR(\theta)(\vec{x}_n - \vec{\alpha})$　$\vec{x}_n - \vec{\alpha} = k^{n-1}R((n-1)\theta)(\vec{x}_1 - \vec{\alpha})$

◆ $y = mx$ 対称移動と拡大･縮小の合成　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

◆ 点列 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 連立漸化式　◆ 平行移動点列 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

③ **漸化式** $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + \beta$ **は重要**　（**平衡値**γ , $\gamma = \alpha\gamma + \beta$ **として**）

$z_{n+1} - \gamma = \alpha(z_n - \gamma)$　よって　$z_n = (z_1 - \gamma)\alpha^{n-1} + \gamma$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_{n+1} - \gamma}{z_n - \gamma} = \alpha(= r(\cos\theta + i\sin\theta)) \leftarrow \gamma$ **中心のスパイラル点列（３点幾何へ）**

複素数の変換は数の場合の処理の仕方（平衡値）に回転・拡大が加わるだけ

③ **漸化式** $z_{n+1} = \alpha\ z_n + \beta$ **は重要**　（**平衡値**γ , $\gamma = \alpha\gamma + \beta$ **として**）

$z_{n+1} - \gamma = \alpha(z_n - \gamma)$　よって　$z_n = (z_1 - \gamma)\alpha^{n-1} + \gamma$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_{n+1} - \gamma}{z_n - \gamma} = \alpha(= r(\cos\theta + i\sin\theta)) \leftarrow \gamma$ **中心のスパイラル点列（３点幾何へ）**

複素数の変換は数の場合の処理の仕方（平衡値）に回転・拡大が加わるだけ