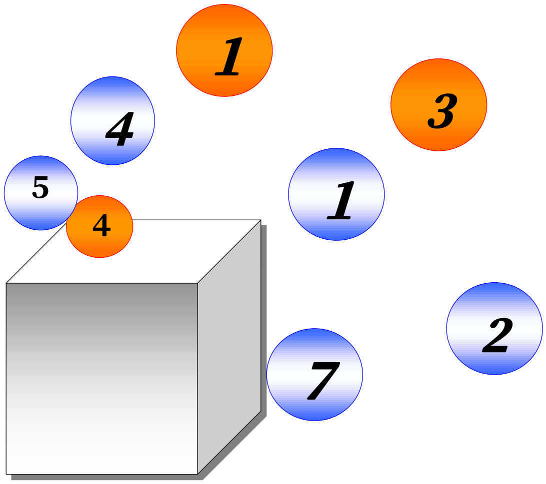
III　確率・統計学

数A　数B　数C



的確な場合分けをしないと標準問題を難問にしてしまう
確率では考え方の「確立」が重要である.

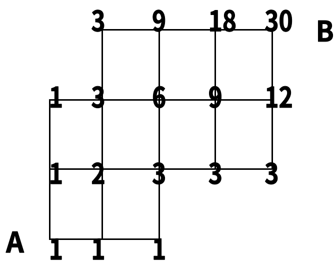
具体的には　どんな図・模式図　で思考するかをマスターせよ

①　直積空間　　②　異なると見る　③ブラウン運動
④　n と n+1 の関係　⑤時系列　⑥推移

[Start]　場合の数を求める基本は

和の法則　$m+n$　（$m+n-p$）と　積の法則　$m\times n$

和の法則の応用
[知ッ得]不規則なA地点からB地点への
道に対し最短経路の数のうまい求め方



２０ 場合の数の問題　樹形図(tree)を描く問題もよく出る

（１）問題の体系　男３人，女２人を→５人はすべて異なると考える（黒アリ３匹，白アリ２匹は？）

Ori.	すべて異なるものの	同じものを含む
順列 円順列 じゅず順列 重複（じゅうふく）順列	${}_nP_r$ $(n-1)!$ $\frac{(n-1)!}{2}$ n^r	$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$ or ${}_nC_p\,{}_{n-p}C_q\cdots$ 難 [][][][][]　順列は箱を用意する
組合せ 重複（じゅうふく）組合せ	${}_nC_r$　★グループ分け問題 [覚え方モデル化] ロビーでの分かれ方・・難 部屋への分かれ方・・・易 ${}_nH_r$　★重複組合せ	同じものを含む組合せは 基本的に数える事 難 同じものを含む**確率**はすべて異なるとして処理する

順列は席替え，組合せは掃除当番，円順列はフォークダンス１人固定し入場時の並び方に帰着

[][][][][]　順列は箱を用意する．P は Permutation，C は Combination の頭文字

[Def.] $${}_nP_r \overset{def}{=} \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{個}} = \frac{n!}{(n-r)!},\quad {}_nC_r \overset{def}{=} \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

[実際の計算] ${}_7P_3 = 7\cdot6\cdot5$，${}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}$ ←[覚え方] C は P に変えて！で割る

「あのね」 熊注意！　[大学]実数！まで拡張できるか→ガンマ関数

（２）★異なるもののグループ分け問題

例　９人が←当然異なるとみる

①A部屋に５人，Bに２人，Cに２人と入る方法は

$${}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2 \text{（通り）}$$

②ロビーで５人，２人，２人に分かれる方法を x 通り

$$x\times 2! = {}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2$$

③ロビーで５人，３人，１人に分かれる方法を x 通り

$$x\times 1 = {}_9C_5\times{}_4C_3\times{}_1C_1$$

④A，Bの２部屋に入る方法は　2^9-2

⑤A，B，Cの３部屋に入る　$3^9-3(2^9-2)-3$

⑥ロビーで２組に分かれる方法を x 通り $x\times2! = 2^9-2$

⑦ロビーで３組に分かれる方法を x 通り $x\times3! = 3^9-3(2^9-2)-3$

・選んで並べる＝まず選んで・それを並べる

$${}_nP_r = {}_nC_r\cdot r!$$

・部屋に分かれて入る（易）

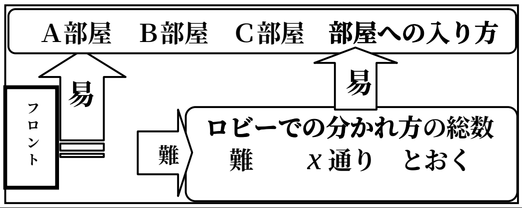
＝まずロビーで分かれ（難）・それから部屋に入る（易）

★グループ分け問題のパターンは２通り

「ホテルの部屋への入り方」

と「ロビーでの分かれ方」

部屋への入り方には２通りのパターン



（３）★重複（じゅうふく）組合せ（${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$）　n個の異なるものから重複を許してr個選ぶ方法

[コツ]暗記ではなく仕切りを作る方法で次のように理解しておく

例　柿，ミカン，リンゴ６個の買い方　や　$x+y+z=6$　$x,y,z\geq0$ の整数解の個数　は

○○●○○○●○ $\overset{\text{1対1の対応}}{\Leftrightarrow}$ 柿２ミカン３リンゴ１，　●○○●○○○○ $\overset{\text{1対1対応}}{\Leftrightarrow}$ $x=0, y=2, z=4$

よって８カ所のどの２個を仕切りと考えるかの数だけある．よって ${}_8C_2$ 通り　（${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6$）

２１　確率の問題　樹形図(tree)を描く問題もよく出る←試験場での思考力をみる Ori.

試行（例　さいころを１個ふって出る目をみる）と事象（例１の目が出る）

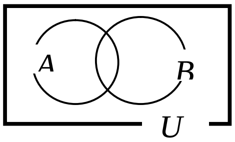
（１）基本事項　確率を集合で？数学ってすべて集合論から構築される（ブルバキ学派），確率論も然り

まず同様に確からしい根元事象からなる U を明確にとらえること

① [Def.]事象 A の確率(Probability)の定義 [☆☆☆][Start]

A は偶然的出来事（Accident）から

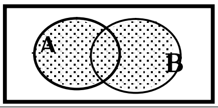
$$P(A) \overset{def}{=} \frac{n(A)}{n(U)}$$ （U は同様に確からしい根元事象からなる集合）[理論]

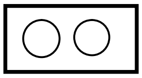


U の例　①直積空間　②異なるものの組合せ　③異なるものの順列

② [Th.]確率の加法定理(またはの確率)*和事象の確率*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$





排反

この公式を使う問題はいい問題（直感で解けない確率）

$A \cap B = \phi$（排反のとき）$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

事象の場合は互いに素であることを特に排反といっている

[知ッ得]　かつの確率を余事象の確率で

A は難 but $\overline{A}$ は易，$A \cap B$ は難 but $\overline{A \cap B}$ は易

で利用　$A \cap B$ の確率（難）を余事象

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$（易）さらに加法定理で

$P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ よって

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\}$

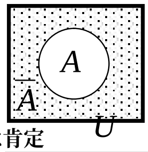
③ 余事象の確率（でないの確率）*余事象の確率*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{\overline{A}})$ でよく使う

（難）　　　（易）

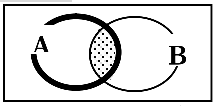
否定的命題は余事象で・２重否定は肯定



④ [Def.]条件付き確率の定義（である時の確率）[数C，旧は数B]

Aである時のBの確率

$$P_A(B) \overset{def}{=} \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



$\because$ $n(U)$ で割って

[覚え方] A における B の割合と考える．U における B の割合が $P(B)$ である

独立試行の定理

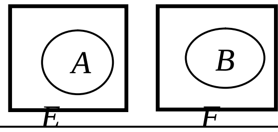
試行 E と F が互いに影響しないとき

E での事象 A

F での事象 B　として，

A, B が同時に起こる確率は

$$P(A) \times P(B)$$



試行の独立と事象の独立を区別

⑤ [Def.]事象 AとBが独立 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $P_A(B) = P(B)$

B の確率が A に影響されないと言うこと

[覚え方]
または　は　たす
かつ　　は　かける

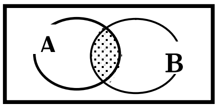
排反と違い独立は直感での判定は困難な概念．故に事象 AとBが独立か従属かの判定は定義から $P(A \cap B)$と$P(A)P(B)$ を求めて，等しければ独立と形式的に行うこと

[独立のいろいろ]
①試行の独立
②事象の独立
③確率変数が独立(難)

⑥ [Th.]確率の乗法定理（かつの確率）*積事象の確率* [数C、旧は数B]

独立事象のとき　　$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

一般的には　　$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$



[参考] $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\}$

数 C（旧数B）の確率とは，条件付き確率・独立事象・分散と標準偏差が加わったもの

⑦ [Th.]確率の反復試行定理（n 回中，当たりが常に p，r 回当たる確率）*独立反復試行の確率*

$P(X = r) = P_r = {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}$ $(r = 0,1,2,\cdots,n) \Leftrightarrow X$ は二項分布 $B(n,p)$ に従う

[参考][Def.]　i）独立試行　ii）生起確率の定常性　iii）２値性　の３条件を満たす試行列をベルヌーイ試行という

[覚え方]「n 回，当たり常に p，r 回当たる確率は

n 回中どの r 回か，当たりの確率・当たりの回数，はずれの確率・はずれの回数」

⑧[コツ]「文字が含まれている問題は，とにかく具体的レベルで規則性を見つける」

（2）確率の出題パターン

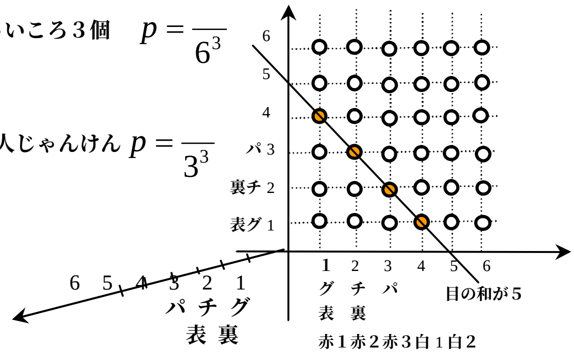
Ori.

①さいころ２個３個の確率問題[☆☆☆]←頻出

超重要　[覚え方]　同様に確からしい根元事象を
１つの格子点○に対応させた直積空間として図示する

さいころ３個　$p = \frac{\quad}{6^3}$

３人じゃんけん $p = \frac{\quad}{3^3}$



硬貨は表裏さいころ，じゃんけんはグ-ﾁｮｷﾊﾟさいころ，４面体・１２面体さいころ，変形さいころなど
[知ッ得]　赤玉白玉問題で２個取り出す場合もすべて直積空間の図で解決できる

	１２３４５６
１２３４５６	６×６表も使う事

	グチパ
グチパ	

	表裏
表裏	

	１２３４５
ハート	
スペード	
ダイヤ	
クラブ	

異なるとしないと赤２個白１個から１個取り出したとき

[誤]｛赤｝｛白｝の二通りの出方よって赤が出る確率は1/2である．

[正解]｛赤｝,｛赤＇｝｛白｝よって2/3

②組合せの確率問題（赤玉白玉，当たりはずれ，数値，男女）

例　赤玉２個，白玉３個から３個取り出したとき・・の確率

｛赤1，赤2，白1，白2，白3｝ $p = \frac{\quad}{{}_5C_3}$

赤２
白３
とかいても確率のときは異なるとみる

[ポイント]異なるとして同様に確からしい根元事象を

③順列の確率問題

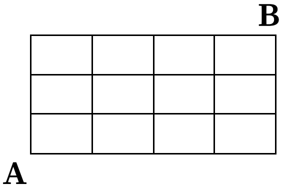
例　１１１２２３　の６個の数字から３つ選び並べるとき・・・の確率

$\{1, 1', 1'', 2, 2', 3\}$　$p = \frac{\quad}{{}_6P_3}$

[ポイント]異なるとして同様に確からしい根元事象を

②③の融合，番号付赤玉白玉問題を出す欲張り先生もいるぞ

④ランダムウォーク，点の移動，道の問題，ブラウン運動←いろいろやってみる　対称性の利用も



確率の独立反復試行定理を使うこともある

[Th.]　$P_r = {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}$　$(r = 0, 1, 2, \cdots n)$

[覚え方] n 回中,当たりが常に確率 p で起こる, r 回当たる確率は
n 回中どの r 回か，当たりの確率当たりの回数，はずれの確率はずれの回数

[注意]分岐点で→1/2，↑1/2のとき，AからBへの ${}_7C_3 = 35$ 通りの行き方は同様に確からしくない

⑤確率の最大値←積型・正の数の大小比較　差より比で判定する方が楽なケース

比 $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ が１より大きいかどうかで判定する　$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1 \Leftrightarrow p_{n+1} \geq p_n$

$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < \cdots > \cdots > p_{19} > p_{20}$ と具体的に書くとよい

⑥その他（時系列の問題，モンモルトの問題，トーナメントの問題など）

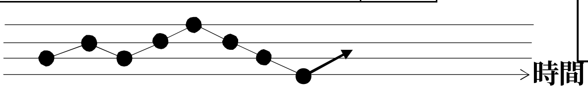
$n = 4$ のときのモンモルトの問題

和１から求める

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{\quad}{4!}$	$\frac{4\times 2}{4!}$	$\frac{{}_4C_2}{4!}$	$\frac{0}{4!}$	$\frac{1}{4!}$	1

ABCD ２つ一致	ABCD １つ一致
AB d c	A c d b
A dC b	A d b c
A c b D	・B　・・
d BC a	・B　・・
c B aD	
b a CD	
の６通り	

[コツ]確率過程・時系列の問題は右のような推移の図で思考して解くこと「対称性を利用し事象をまとめる問題も重要」



⑦ [Def.] 確率変数 X の確率分布と X の平均（期待値）・分散（ぶんさん）・標準偏差（ひょうじゅんへんさ）

X の確率分布表（Probability distribution）[☆☆☆][花ﾌﾟﾘ]

確率分布表があっての期待値（平均）分散標準偏差である

X のとる値	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	確率の合計
その確率 P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

[超重要]確率１の分配
$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$
和＝１で検算，和＝１を利用

[覚え方]確率１を分配した表ということで確率分配表と覚える
確率の和が１となることの検算を必ず行うこと．

[といえば]平均（期待値）といえば即　確率分布表を作り始めよ。（平均と標準偏差の２つを求める様に練習しておくことも大切である）

X の平均　$E(X)\overset{def}{=}m=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

X の分散　$V(X)\overset{def}{=}\sigma^2=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$

σ シグマと読む

$=x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2+\cdots+x_n{}^2p_n-m^2$

よって　$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

分散は定義からでなく必ず
２乗の平均－平均の２乗
で計算するように

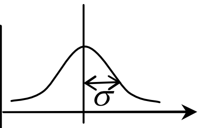
X の標準偏差　$\sigma\overset{def}{=}\sqrt{V(X)}$

スタイルは身長と体重，直線は１点と傾き，円は中心と半径，
そして　確率分布は平均と標準偏差←真ん中とばらつき

[コツ]さいころの目を X とする
X の確率分布表でしっかりイメージ

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

平均 $m=3.5$
分散 $\sigma^2=\dfrac{35}{12}$



[覚え方]
- 「何の」をまず明確にする．そして，それの確率分配表を作る
- 確率１を確認，あとは形式的にあてはめること．１を分配した表が確率分布（分配）表
- 平均の m は mean から，分散・標準偏差は“ばらつきの度合い”のこと．（直感的には変曲点までの幅）
- 『X の確率分布，平均　分散　標準偏差』と言い覚えておく

⑧ 平均・分散を公式で求めることも　平均の線形性は成立しかし分散は

$E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$ ←しかし分散は不成立

二項分布 $B(n,p)$ の平均 $E(X)=np$，分散 $V(X)=npq$（公式）

[重要] 和の平均は平均の和
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$
- **確率変数 X,Y が独立のときは**
  積の平均 $E(XY)=E(X)E(Y)$

（３）確率漸化式（ぜんかしき）・場合の数漸化式[☆☆☆][２次で頻出][花ﾌﾟﾘ]

事象 A の起こる確率 p_n を，次の模式図で考える

確率漸化式　超重要[コツ]
p_{n+1}　を　p_n　との関係で求める

第 n 回目　　　第 $n+1$ 回目

（ア）p_n（起こる）$\xrightarrow{a}$ p_{n+1}（起こる）

（イ）$1-p_n$（起こらない）$\xrightarrow{b}$ p_{n+1}　　$1-p_{n+1}$

$p_{n+1}=p_n\times a+(1-p_n)\times b$ ←漸化式を導く

n 回目　　$n+1$ 回目
（ア）a_n → a_{n+1}
（イ）b_n → b_{n+1}
（ウ）c_n → c_{n+1}

$\forall n\in N$；$a_n+b_n+c_n=1$ の利用がポイント．題意から確率の対称性も見抜く

$n+1$ 回目起こるのは，（n 回目起こり　かつ続いて　起こる）
または（n 回目起こらず　かつ続いて　次に起こる）の場合があり，それらは互いに排反である

典型的な例　１～５までの数値が繰り返しランダムに表示される機械がある．
出た数の和が偶数である確率 p_n は

第 n 回目　　　第 $n+1$ 回目

偶数　p_n → 偶数 p_{n+1}

奇数 $1-p_n$ → 偶数 p_{n+1}

$p_{n+1}=p_n\times\dfrac{2}{5}+(1-p_n)\times\dfrac{3}{5}$，　$p_1=\dfrac{2}{5}$

偶数＝偶数かつ $\{2,4\}$ または　奇数かつ $\{1,3,5\}$

[コツ]
対称性のある問題は対称な事象を1つにまとめその推移を追うと良い

（４）確率分布 数A期待値まで 数Bメジアン・平均・分散・標準偏差・相関係数まで 数C全

離散型確率分布（離散型の確率変数を X ，Y ）／ 連続型確率分布（連続型の確率変数 X ）

Def. 確率分布

離散型

$P(X=x_k)=p_k$ ⇔確率変数 X の確率分布表

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

$\forall k: p_k \geq 0 \quad \wedge \quad p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n=1$

分布（Distribution=分配）１の分配

連続型

確率密度関数を $f(x)$ として

$$P(a \leq X \leq b)=\int_a^b f(x)dx$$

確率は面積で与えられる

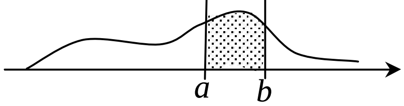
$\forall x \in R; f(x) \geq 0 \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

相対度数の表

確率分布のグラフ

x_1 x_2 x_3 $\cdots$ x_k $\cdots$ x_n 高さ p_k

確率密度関数 $f(x)$ のグラフ （面積１）



Def.Th 平均 期待値

X の平均 mean 期待値 Expectation of X ともいう

$$m=E(X)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

平均の性質 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(aX+b)=aE(X)+b$ が成立

X,Y が独立の時は $E(XY)=E(X)E(Y)$ 一般には不成立

X の平均（期待値）

$$m\overset{def}{=}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

スタイルは 身長と体重で 分布は 平均と標準偏差で平均と同じように、標準偏差（ばらつきの度合い）もイメージできるように。

分散

X の分散 variance （ばらつきの度合い）

$$\sigma^2=V(X)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2 p_k=\cdots=\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k-m^2$$

一般に $V(x)=E((X-m)^2)=\cdots=E(X^2)-m^2$

分散は ２乗の平均－平均の２乗 で計算する

$V(aX+b)=a^2V(X)$ ， X,Y が独立の時 $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

X の分散

$$\sigma^2=V(X)\overset{def}{=}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx$$

$$=\cdots=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-m^2$$

分散は ２乗の平均－平均の２乗 で計算する

σ は シグマ とよむ

標準偏差

standard deviation

X の標準偏差 $\sigma\overset{def}{=}\sqrt{V(X)}$ $\quad \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

X の標準偏差 $\sigma\overset{def}{=}\sqrt{V(X)}$

Def.Th ベルヌーイ試行 二項分布 と 正規分布

①独立試行定理で定まる確率の分布

$$P(X=k)={}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (q=1-p)$$

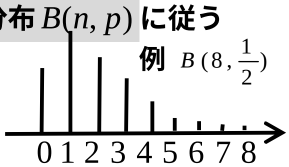
$$(k=0,1,2,\cdots,n)$$

⇔②

X	0	$\cdots$	k	$\cdots$	n	計
P	${}_nC_0 q^n$	$\cdots$	${}_nC_k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	${}_nC_n p^n$	1

⇔③確率変数 X は二項分布 $B(n,p)$ に従う

例 $B(8,\frac{1}{2})$



このとき、（公式）

X の平均 $m=E(X)=np$

X の分散 $\sigma^2=V(X)=npq \quad (q=1-p)$

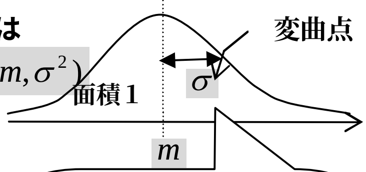
X の標準偏差 $\sigma=\sqrt{npq}$ である。

①確率密度関数が正規分布曲線である分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

②確率変数 X は

正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従う



このとき

X の平均 m

X の標準偏差 σ

である。（公式）

標準偏差は分布のばらつきの度合いを表わす数値で変曲点までの幅になる

特に $N(0,1)$ を標準正規（ガウス）分布という

誤差の分布は代表的なこの例である

Th. 近似と標準化

n が大きい時は， 二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X は,近似的に正規分布 $N(np,npq)$ に従う

さらに，$Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ で確率変数 X を Z に変換すると Z は標準正規分布 $N(1,0)$ に従う

一般に平均 m 標準偏差 σ の確率変数 X は $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とすると $E(Z)=0, V(Z)=1$ である．標準化（正規化）するという

Def.Th 相関係数 代表値

確率変数 X と Y の相関係数（そうかんけいすう） $r_{xy}\overset{def}{=}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i-m_x}{\sigma_x}\cdot\dfrac{y_i-m_y}{\sigma_y}=\cdots=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ （公式）

その他の基本的な分布の代表値としてメジアン（中央値）とモード（最頻値（さいひんち））がある

■　**センター数学ⅡＢのＢ分野の選択**は（ベクトル・数列・**資料の整理**・アルゴリズムから２つ）

そこで資料の整理分野を選択するのも作戦の1つ。内容は以下の①～⑩　たったこれだけです。
小学校の保健係の皆さんご苦労様です。クラス(10 人学級が多い)の皆の身長と体重のメジアン･モード･平均と標準偏差　さらに相関係数を算出して下さい。つまり、ベクトル (高等数学) 数列 (数学) 資料 (算数レベル) という事なら易しいので選択する事も考えておいて悪くはない。[教師の立場から] 日頃からテストは平均mだけでなく，標準偏差σもいっておけばよい

① 資料の整理では、確率分布表を相対度数表として，確率を**相対度数**という
また、棒グラフの事を**ヒストグラム**という。

２つの資料の与え方[いろいろ]
①具体的に
②度数分布で
③表計算ソフトの画面で

② 平均値資料の整理では平均を平均値という、

[Def]　$m_x = E(X) \overset{def}{=} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

合計を資料の数（１０，１００が多い）で割ってもよい（これなら小学生の保健係でも判る）

[$m_y = E(Y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ ，**２乗の平均** $E(X^2) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ，**積の平均** $E(XY) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$]

③ **メジアン（中央値）**は資料の数が奇数なら
ちょうど真ん中のデーターの値，偶数なら真ん中が２つあるのでその中央（平均）の数値をとる

２つの資料に対して，５つの平均	
平均	$E(X)$，$E(Y)$　と
２乗の平均	$E(X^2)$，$E(Y^2)$　と
積の平均	$E(XY)$　から
分散、標準偏差、相関係数のすべてが求まる。	

④ **モード（最頻値）**は言葉のとおり最も（モ）
頻度(ド)の高い値　１つとは限らない

⑤ **変数の変換**。資料の変数 X を $Y = \dfrac{X-p}{q}$ で単純な値に置き換えて計算。元に戻すと計算が楽。

これらの公式そのものは数Ｃの内容だが・・・　　例 引いて割って１５、２０，２５→－１，０，１と単純に

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$　和の平均は平均の和（○）を使おう

ただし，$V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$　和の分散は分散の和は（×）　X, Y が独立の時は（○）

$E(XY) \neq E(X)E(Y)$　積の平均は平均の積は（×）　X, Y が独立の時は（○）相関係数＝０

資料の整理では、相関係数まで求めるので、独立でない場合がほとんどと想定できる。

変数変換 $Z = aX + b$ と平均･分散･標準偏差　数Ｃの内容だが

$E(aX+b) = aE(X) + b$　(○)

$V(aX+b) = a^2 V(X)$　(○) ←　a の二乗に注意！

$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$　(○)

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$
$= E(XX) - E(X)E(X)$
を分散というのに対して
$E(XY) - E(X)E(Y)$ を共分散という
積の平均－平均の積

⑥ 分散は定義でなく **[公式] 分散＝２乗の平均－平均の２乗**

で計算する が 定義も知っておく． $\sigma^2 = V(X) \overset{def}{=} E((X-m)^2) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \cdots = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$x_i - m$ を**偏差**という　よって分散＝偏差の２乗の平均で定義

⑦ 標準偏差とは分散の正の平方根である $\sigma = \sqrt{V(X)}$（分散を小数より分数で表すと計算しやすい）

⑧ 相関係数は，$r_{xy} \overset{def}{=} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i - m_x}{\sigma_x} \cdot \dfrac{y_i - m_y}{\sigma_y} = \cdots = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ となるから

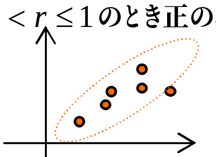
２つのデーターの各々の平均と標準偏差に　資料の**積の平均**をさらに求めて

[公式] 相関係数は $r_{xy} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{\text{積の平均－平均＊平均}}{\text{標準偏差＊標準偏差}}$　**←この分子を共分散という**

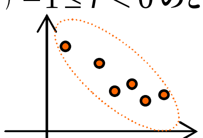
で計算する が 相関係数の定義も知っておく．

⑨ 相関係数 r のとる値の範囲は $-1 \le r \le 1$ になる．**散布図と相関係数のイメージは重要**

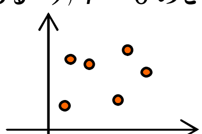
ア) $0 < r \le 1$ のとき正の相関がある　イ) $-1 \le r < 0$ のとき負の相関がある　ウ) $r = 0$ のとき相関はない　という



ｒ＝０．８ぐらいかな



ｒ＝－０．８ぐらいかな



ｒ＝０．０１ぐらいかな

⑩ **はじめに２つの変数をもつ資料、相対度数表が与えられる。それを特徴付ける値（代表値）として，メジアン（中央値)、モード（最頻値)、平均値，分散・標準偏差、相関係数を扱う。**

(５) 確率の重要問題

重要な話題[いろいろ]樹形図, トーナメント, リーグ戦の問題, モンモルトの問題（$n=4$, $n=5$）, 時系列の問題, ランダムウォークの問題, ブラウン運動の問題, 確率漸化式, 方程式の解と確率, 反復試行定理, 最大確率の問題, 文字（など）を含む確率分布と平均･分散･標準偏差、期待値の計算と2項定理

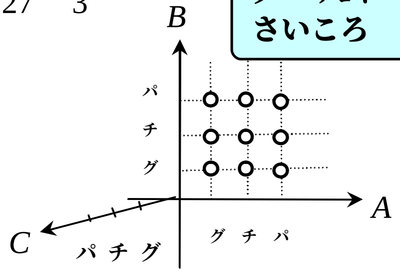
① ３人じゃんけんの問題

じゃんけんは
グーチョキパー
さいころ

例 ３人じゃんけんで１人の勝者が２回以内のじゃんけんで決まる確率

３人じゃんけんで　あいこ $\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$　２人勝 $\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$　１人勝ち $\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

２人じゃんけんで　あいこ $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$　１人勝 $\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$　だから



最初　１回後　２回後

（ア）　３人　→　３人　→　１人　・・・・$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

（イ）　３人　→　２人　→　１人　・・・・$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$

（ウ）　３人　→　１人　・・・・$\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$　（答）

[あのね]ジャンケンに必勝法があります。「最初はグ→チョキ→パ→グ→」の順に出していけばよいのです。（統計＋理論上）グーでアイコ→次は同じ手を続けて出す確率が少ないのでチョキかパーを相手が出します。よってチョキを出せばよいのです。

② さいころの目の最大値・最小値問題

タマネギ型の確率

バームクーヘン型の積分というのもある

例 ４個さいころを投げたとき，出た目の最大値を M，最小値を m の確率分布表

M	1	2	3	4	5	6	計
P	$(\frac{1}{6})^4$	$(\frac{2}{6})^4-(\frac{1}{6})^4$	$(\frac{3}{6})^4-(\frac{2}{6})^4$	$(\frac{4}{6})^4-(\frac{3}{6})^4$	$(\frac{5}{6})^4-(\frac{4}{6})^4$	$(\frac{6}{6})^4-(\frac{5}{6})^4$	1

$p(M=3)=p(M\le 3)-p(M\le 2)$

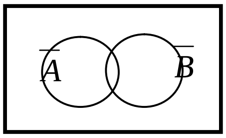
Max3={123}―{12}

[超重要]確率１の分配　$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

m	1	2	3	4	5	6	計
P	$(\frac{6}{6})^4-(\frac{5}{6})^4$	$(\frac{5}{6})^4-(\frac{4}{6})^4$	$(\frac{4}{6})^4-(\frac{3}{6})^4$	$(\frac{3}{6})^4-(\frac{2}{6})^4$	$(\frac{2}{6})^4-(\frac{1}{6})^4$	$(\frac{1}{6})^4$	1

min3={3456}―{456}

③ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ の公式を使う問題はいい問題



例 さいころを４個投げたとき，１と６の目の両方が出る確率

A：１の目が出る　B：６の目が出る　として,

$A\cap B$ は難　しかし　余事象　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$　で加法定理から易

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}$$

$$=1-\{(\frac{5}{6})^4+(\frac{5}{6})^4-(\frac{4}{6})^4\}$$　かつの確率を余事象で, さらに　～でない確率で表現した

④さいころ n 回投げたとき、1の目が出る回数 $X=k$ の期待値

2項定理を因数分解の方向に使う期待値の計算問題　（2項分布）

$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^k y^{n-k}$ を x で微分して $n(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k x^{k-1}y^{n-k}$　両辺に x をかけて

$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k x^k y^{n-k}$ に代入, $E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{n-k}=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6}\leftarrow E(X)=np$（公式）

[重要][応用]さいころ n 回投げたとき、1の目が出た回数を k とするとき $X=2^k$ の期待値の計算法

$E(X)=2^0\cdot{}_nC_0p^0q^n+2^1\cdot{}_nC_1p^1q^{n-1}+2^2\cdot{}_nC_2p^2q^{n-2}+\cdots+2^n\cdot{}_nC_np^nq^0$

$=(2p+q)^n=(\frac{7}{6})^n,(p=\frac{1}{6},q=\frac{5}{6})$　2項定理を因数分解の方向に使う

$$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^k y^{n-k}=(x+y)^n$$