II　幾何学

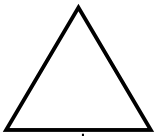
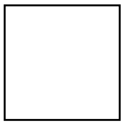
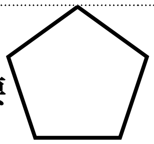
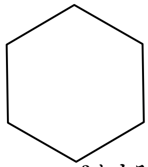
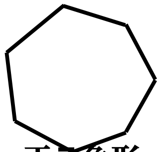
正3角形「参考に」

$r=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$　$R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$　$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正5角形[参考に]

$r=\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{20}}a$　$R=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}a$　$S=\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}a^2$

Ori.

 →  →重要  →  → 

正５角形

二項方程式 $z^5=1, \cos 72^\circ$

π=3 とすることは円＝正 6 角形とすることになる

正７角形

$z^7=1$

↓

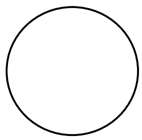
正１２角形

↓

・

・

↓

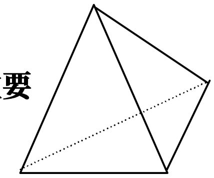


円

(π=3.14･･･)

↓

重要



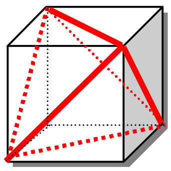
◆埋め込み

[四面体の辺の数＝6＝面の数]

四面体の平行六面体への埋め込み

合同四面体の直方体への埋め込み

正四面体の立方体への埋め込み



「オイラー数」頂−線＋面は位相幾何の最も基本的な不変量　線＝頂点＋面−２

[覚え方]線は帳面に引け

人生幾何(いくばくぞ)

人生在世有幾何

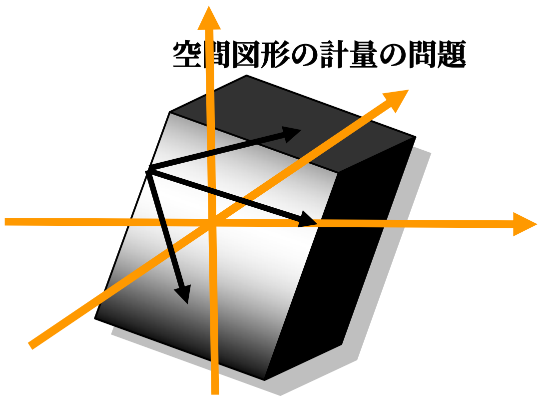
何必苦苦学幾何

学了幾何有幾何

不学幾何又幾何

①ユークリッドの方法　補助線

空間図形の計量の問題



「立体を座標設定して解く」

②デカルト座標　座標設定

幾何の問題は補助線でなく,座標設定に気づけ劇的に簡単に解けるぞ！[デカルト]

③ベクトルによる方法　基底設定

基底とする一次独立な 3 つのベクトルを最初に設定してそれでもって目的の部分を表現し解決する

基底にも直交基底正規直交基底など独特なものもある

[黄金比]の話題

正５角形,フィボナッチ数列,パスカルの三角形，階段の上り方の総数、ウサギ算・・・・

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\qquad \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

１１　三角形

[あのね]・三角関数は辺と角の間をとりもつ媒酌人
・sin を正弦 cos を余弦というのはなぜ?　まず正の弦があって余弦とは余角の正弦という意味
・角の名前は混乱がない限り頂点名だけでも十分　∠ＢＡＣまたは∠Ａは単にＡとかけば角Ａを表す　・180°をπと通称しているのはπラジアンが180°だからである

（１）辺のみの関係

a,b,cが三角形の３辺　$\Leftrightarrow |b-c|<a<b+c \Leftrightarrow \begin{cases} a<b+c \\ b<c+a \\ c<a+b \end{cases}$

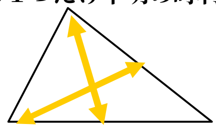
$a,b,c>0$ は無くともここから得られます

（２）角のみの関係　度は（地球の１年は約３６０日からきた）角の単位で，ラジアンには普遍性あり

A,B,C が三角形の内角　$\Leftrightarrow \begin{cases} A>0° \\ B>0° \\ C>0° \\ A+B+C=180° \end{cases}$

[覚え方] ✕(バツ)定理

２組の辺と角の４つのうち１つだけ不明の時利用



辺角辺角の４つの関係

（３）辺と角の関係

[Th.] 正弦定理と余弦定理　超重要[☆☆☆]

① ２組の辺と角の関係[正弦定理]

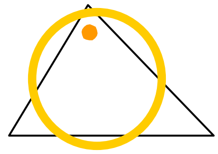
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\left(=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

[センター必出]
外接円の半径 R といえば
正弦定理

[覚え方] ○(マルちょん)定理

３辺１角の４つのうち１つだけ不明のとき利用



辺辺辺角の４つの関係

② ３辺と１角の関係[（第２）余弦定理]

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

③ 角の sin,cos を辺に直す公式　　難→易

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　　（$\tan A$ はない）

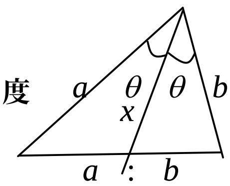
これから∠A：鋭角 $\Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$

[といえば] R といえば正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$，　r といえば $S=sr$

第1余弦定理もあるが
$c=a\cos B+b\cos A$

[知ッ得]　**三角形を解く問題でよく使われる幾何公式**

（１）円周角は等しい　中心角・円周角の定理
　円に内接する４角形の向かい合った角の和は１８０度
　相似な三角形の対応する辺の比は等しい



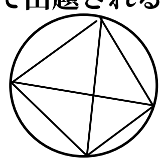
（２）角の２等分線の性質（重要）と**２等分線の長さ x**

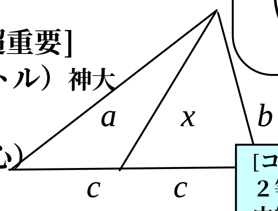
① $\dfrac{1}{2}ab\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}ax\sin\theta+\dfrac{1}{2}bx\sin\theta$　　　角の２等分線

② 角の２等分線といえば，対辺を $a:b$ の比に分ける[超重要]

③ ひし形の対角線は角を２等分する（同じ向きのベクトル）神大

[知ッ得]センターでは円に内接する四角形で出題される





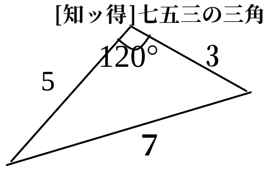
（３）三角形の五心の定義（重心　垂心　内心　外心　傍心）

（４）[Th.]①中線（ﾊﾟｯﾌﾟｽの）定理と**中線の長さ x**　$a^2+b^2=2(x^2+c^2)$

[コツ]
２等分線の長さ
中線の長さは
正弦・余弦定理でなく（２）（４）で求められる

１２ 面積の公式

[知ッ得]七五三の三角形　Ori.



（１）三角形

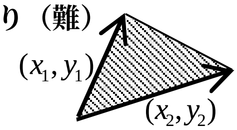
あらゆる面積の公式をまとめてみました

$S=\frac{1}{2}$底辺・高さ

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ [これが start]　$=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$ (*)　$=\frac{abc}{4R}$

$S=sr$　内接円の半径 r といえば $S=sr$　ここで $s=\frac{a+b+c}{2}$ ：周の半分である　←証明は図で

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　←ヘロンの公式　証明は(*)より（難）



$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$←座標平面で３点の座標が判っているとき

ベクトルで面積と言えば空間で面積と言えばコレ

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$　←証明は(*)より　証明もテストに出る

外積利用

$S=\frac{1}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$ ←空間座標

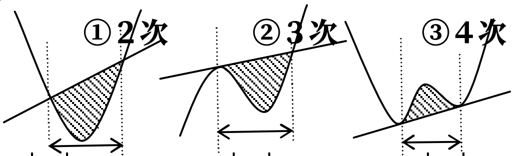
（２）整関数と直線で囲まれた部分の面積の公式[☆☆☆☆☆][花プリ]

[これ以外では]複素数平面上での公式は？極形式では？

面積$=\int_a^b$(上－下) dx　（$a<b$，　上－下は長さ，　dx は薄い横幅）

通称「６分の３乗公式」という

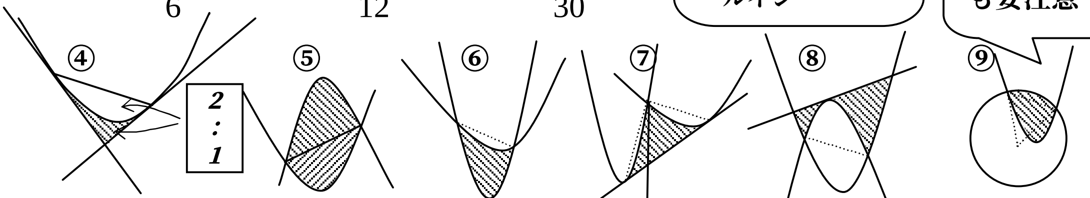
①２次　②３次　③４次　　a（最高次の係数）と幅で決まる量



[知ッ得] $S=\frac{|a|}{6}$幅^3　$S=\frac{|a|}{12}$幅^4　$S=\frac{|a|}{30}$幅^5

[覚え方]６３３で１２年大学４年で卒業し３０歳でゴールイン

[テストに出る]円と放物線も要注意



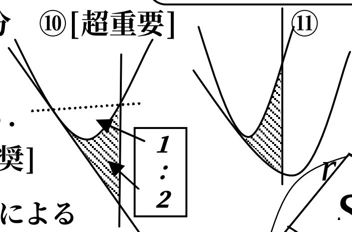
[知ッ得]　$S=\frac{1}{2}\frac{|a|}{6}$幅^3　　境界が放物線と直線（接線）で囲まれた図形の面積は公式で処理する気持ちで

（３）２次関数とその接線とで囲まれた部分の面積[☆☆☆]

接線（接曲線）とで囲まれた部分は微積の融合問題としてセンター頻出
⑩を知って④⑦は導けるので⑩が最重要

$\int_{接点}(2次曲線-接線)dx=\int_{接点}a(x-接点)^2dx$ の形にする．積分が楽

$=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2dx=\left[\frac{a}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta=\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3$←展開せずに積分　⑩[超重要]

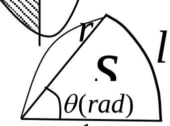


さらに　$(\beta-\alpha)^3=\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$ で計算する．

または，解の公式から直接 $\beta-\alpha$ の形をあてはめる←簡単[推奨]

（４）理系の人はさらに

$S=\frac{1}{2}r_1r_2|\sin(\theta_1-\theta_2)|$　←極座標による



正射影 $S'=S|\cos\theta|$，楕円 $S=\pi ab$，Wallis の公式，扇形の弧の長さと面積　$l=r\theta$，$S=\frac{1}{2}r^2\theta$

区分求積法 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$，　$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ は階段図形の面積のはさみうちで極限

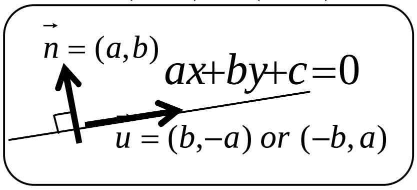
$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi a^2$（四分円の面積）

１３ 図形と方程式→図で考え計算は補助，とにかく図で考えよ．

描き方は①正確に②イラスト的に を使い分ける

（１）①直線 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$ といえば，通る１点 (x_1,y_1) と方向ベクトル $\vec{u}=(m,n)$

$ax+by+c=0$ の法線ベクトルは $\vec{n}=(a,b)$，方向ベクトルは $\vec{u}=(b,-a)$ or $(-b,a)$



②円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ といえば，中心と半径

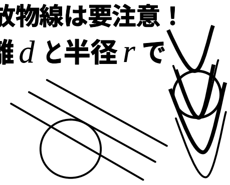
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ は $\begin{cases} \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c>0 & \text{のとき　円} \\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c=0 & \text{のとき 点}\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2}\right) \\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c<0 & \text{のとき 図形を表さない} \end{cases}$

よくテストに出る

交わる，接する，離れるの判定は判別式の正０負でできる？ 円と放物線は要注意！

[重要]円と直線：距離 d と半径 r で

$d=\dfrac{|\qquad|}{\sqrt{\qquad}}\ \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix}\ r$

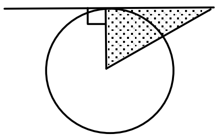


（２）位置関係

円と直線，２円，放物線 ，（２次曲線）の位置関係

[コツ]円と直線の問題は図を描く段階で決まる．

①円と接線　　②円と弦 [最頻出]☆☆　③２円



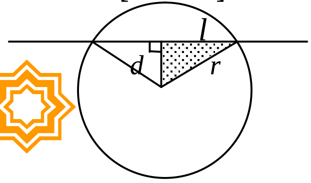
接線の補助線 Key は垂直

「円の接線の定義」

中心と接点を結ぶ直線に

垂直な直線を接線という

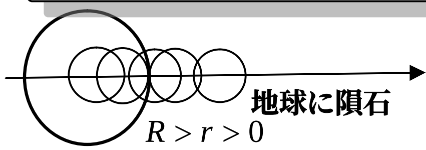
[円の接線の作図]



弦の長さ $2l$ はピタゴラスの定理から

(超重要) $r^2=d^2+l^2$

$d=\dfrac{|\qquad|}{\sqrt{\qquad}}$ を用いる



２円の位置関係の問題（中心間の距離 d と半径 R,r で）場合分けの境界は $R\pm r$

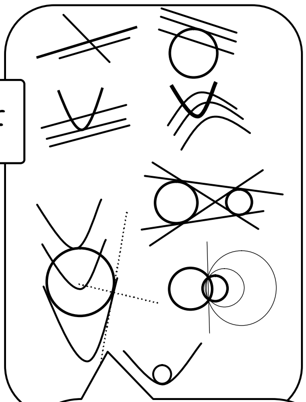
内接 ⇔ $d=R-r$　外接⇔ $d=R+r$

交わる⇔ $R-r<d<R+r$

内離 ⇔ $d<R-r$　外離⇔ $d>R+r$

（３）円の接線・極線(きょくせん)の公式

位置関係の問題[いろいろ]→



[超重要] $x_0x+y_0y=r^2$，$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

（４）分点の公式

[覚え方] $\dfrac{\text{タスキ掛け}}{\text{比の和}}$ a：bに外分はa：－bなど一方に－を付けて

$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$，ベクトル $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$，複素数 $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

中点は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，重心は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ は四面体の重心

（５）よく使う重要公式[超重要]

１点と直線との距離 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [覚え方]ルートぶんの絶対値

[超重要][知ッ得]１点が正領域内・負領域内の点の時は「ルート分の｜｜不要」

三角形の面積 $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ [覚え方]２分の１絶対値のタスキがけ

[重要]円と放物線が接する条件は D=0 ではなく，接点での法線が円の中心を通るで捉えるのがポイント

（６）交点を通る曲線群

任意の $k(\in R)$ に対し，$f(x,y)+kg(x,y)=0$ は $f(x,y)=0$ と $g(x,y)=0$ の交点を通る曲線群

$\boxed{\text{例}}$ ２円 $f(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$，$g(x,y)=x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ の交点を通る円は

$f(x,y)+kg(x,y)=0$ $(k\neq 1)$ ただし，$g(x,y)=0$ は表さない。$k=-1$ のときは，２円の共通弦

（7）軌跡の考え方[重要][☆☆☆]

[コツ]問題文にない文字 X,Y を選べ

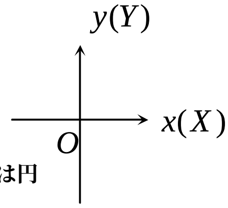
$(x,y),(x',y'),(x^*,y^*),(u,v),(p,q),(a,b),(\alpha,\beta),\ s,\ t,m\cdots$

①軌跡を求めたい点の座標を(X,Y)などと置きその関係式を求める

②なくす文字（パラメーター）と残す文字X,Yを明確に意識

③軌跡の制限に注意←式から図から[覚え方]トラは死しても皮残す

$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ は円



[類似]複素変換（旧課程） なくす文字 z と残す文字 w

z　　zとwの関係　　w

元の図形 → 変換式 $w=f(z)$ → 後の図形

[類似]一次変換（新課程） なくす文字 x,y と残す文字 x',y'

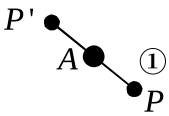
(x,y)　　x,y,x',y'の関係　　(x',y')

元の図形 → 変換式 $\vec{x'}=A\vec{x}$ → 後の図形

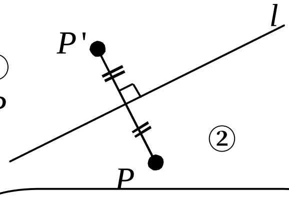
[注意]「点$P(\alpha,\beta)$が」といったときα,βは座標だから当然実数である．α,βがある条件を満たすときの点$Q(\alpha+\beta,\alpha\beta)$の存在領域の問題は$\alpha,\beta$の実数条件に注意する

（8）対称移動[いろいろ]

① PとP'が点Aに関し点対称$\Leftrightarrow$ P,P'の中点がA



② PとP'が直線lに関し線対称$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P,P'\text{の中点が}l\text{上} \\ PP'\perp l(\text{垂直条件})\end{cases}$ [超重要]



③ 1次変換　x軸対称移動　y軸対称移動　原点対称移動

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

[覚え方]サインは差が IN
複素数平面では
$w=z(\cos\theta+i\sin\theta)$

$y=x$に関する対称移動　$y=-x$に関する対称移動　原点中心の角θの回転移動

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

④ $y=mx$ $(m=\tan\theta)$に関する対称移動$\Leftrightarrow$ x軸対称移動と原点中心角2θの回転移動の合成

ア $w=\bar{z}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

↑複素数は単純スゴイ[旧課程]

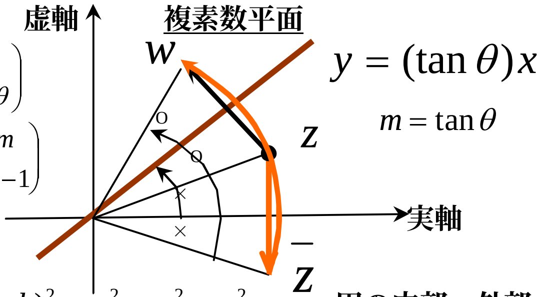
$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}$ R($-\theta$)→x 軸対称→R(θ)も対称軸を x 軸に持って行き移動戻す

イ 一次変換では[新課程]

$\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{pmatrix}$

三角関数の有理関数化をして$=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2&2m\\2m&m^2-1\end{pmatrix}$

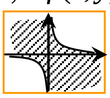
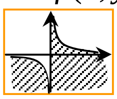
ウ ②の方法（垂直かつ中点が直線上）で



（9）不等式の表す領域

① $y>f(x)$　上側（下側），$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$，$x^2+y^2>x$　円の内部・外部

② $f(x,y)>0$，$f(x,y)<0$←それぞれ$f(x,y)$の正領域と負領域という、注意曲線の上下でない

③ $xy<1$  と，$y<\dfrac{1}{x}$  の違い

④ $f(x,y)g(x,y)<0$　←境界をおさえる

⑤ 1次元絶対値・2次元絶対値と不等式
↑絶対値の中が0の時を境界として場合分け

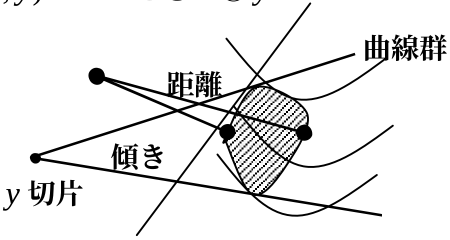
⑥ ベクトル・複素数による不等式のあらわす領域

例　円の内部$|\vec{x}-\vec{a}|<r$，$|z-\alpha|<r$，
$|z-\alpha|\le k|z-\beta|$←$k\ne1$アポロニウスの形からも

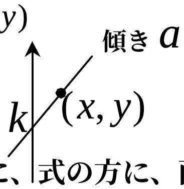
[応用]境界線$f(x,y)=0$の両側に点A,B
$\Leftrightarrow$2点$A(a,b),B(c,d)$が$f(x,y)$の正領域と負領域にある
$\Leftrightarrow$ $f(a,b)\times f(c,d)<0$
[コツ]直線$f(x,y)=ax+by+c=0$と$f(x,y)$の正領域内の点(x_0,y_0)との距離
$d=\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (絶対値不要) 負領域なら−

（10）領域における最大・最小のパターン分類　[花プリ]　0ri.

$(x,y)\in D$ のとき　①$y-ax$　②$y-x^2$　③x^2+y^2　④xy　⑤$\dfrac{y}{x-1}$



$y-ax=k$ とすると点(x,y)を通り傾きaの直線のy切片がこの値kである
[重要]aの値で場合分けする問題が良い。領域の方に、式の方に、両方は難



$=k$ とおいた曲線上の点のx,yは式の値をkとするx,yである

・①②④は　$=k$　とおき曲線群とDが共有点をもつ範囲でkの最大・最小を考える

・③　x^2+y^2　は　直接　原点と(x,y)との距離の2乗と考える

$(x-1)^2+y^2$は　$(1,0)$と(x,y)との距離の2乗と考えるとよい

x^2+y^2は
距離の2乗

・⑤　$\dfrac{y}{x-1}$は　直接　$(1,0)$と(x,y)とを結ぶ線分の傾きと考える

$\dfrac{y}{x-1}$は傾き

[なるほど] $\dfrac{\log x}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\sin x+2}{\cos x-1}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1}$ なる式も2点を結ぶ線分の傾きと見えてきます。領域は2次元絶対値の問題，境界が円になることが多い

文系ではこれより難しいテーマはありません

曲線群の通過領域
$z=g(t)=F(t,x,y)$
tの方程式 $z=g(t)=0$ が実解を少なくとも一つもつためのグラフの形状に帰着 $F(t,x)=0$ なら実数解の存在範囲の問題に

0ri.

（11）曲線群の通過領域の問題[花プリ]　[☆☆☆][超重要]

曲線群$F(t,x,y)=0$，$y=f_t(x)$，$(t\in R)$の通過領域

⇔ パラメーターtが実数である点(x,y)の集合

⇔ tの方程式$F(t,x,y)=0$が少なくとも1つの実数解tをもつ(x,y)の条件

⇔ 関数$z=g(t)=F(t,x,y)$がt軸と少なくとも1つの共有点をもつ(x,y)の条件

（ア）1次（パラメーター）の時　$\boxed{\text{定点通過曲線群}}$　$C_t:(x-t)^2+\{y-(1-t)\}^2=t^2+(1-t)^2$は任意の$t$で円

①　円群$C_t: x^2+y^2-2tx-2(1-t)y=0$の通らない点全体の集合

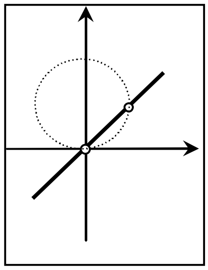
⇔ tの1次方程式　$2(x-y)t=x^2+y^2-2y$が（実数tを）解をもたない(x,y)の条件

［直接に］(0,0)(1,1)を常に通る円群が通過しない領域を考える

⇔ tの1次関数$g(t)=2(x-y)t+(x^2+y^2-2y)$が$t$軸と共有点をもたない$(x,y)$の条件

直線　$g(t)=mt+n$
がt軸を通らない条件
傾き0で，切片0でない

⇔ $2(x-y)=0$ かつ $x^2+y^2-2y\neq0$



②　放物線群$P_a: y=ax^2+(1-a)x+3-2a$　$(a\neq0)$の通過しない領域

⇔ aの1次方程式$(x^2-x-2)a=y-x-3$が$(a\neq0)$なる解をもたない(x,y)の条件

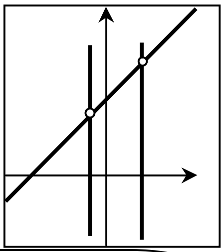
[直接に] (−1,2)(2,5)を常に通る放物線群が通過しない領域を考える

⇔ aの1次関数$g(a)=(x^2-x-2)a-y+x+3$がa軸の$(a\neq0)$の部分と共有点をもたない条件

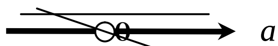
⇔（ア）　$x^2-x-2=0$　かつ　$-y+x+3\neq0$

または

（イ）　$x^2-x-2\neq0$　かつ　$-y+x+3=0$



直線　$g(a)=ma+n$
がa軸の原点以外と共有点をもたない条件



（ア）傾き0の時　切片0でない
（イ）傾き0でない時　切片0で原点を通る

方程式$F(x,a)=0$の実数解の存在範囲の問題もパラメーターaの実数解条件から求まる

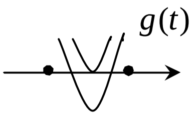
（イ）２次（パラメーター）

「南京玉簾（なんきんたますだれ）」は包絡線と直線群の芸なり

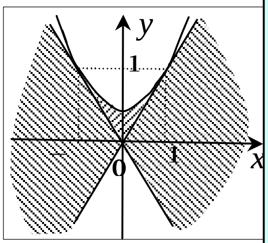
③ $0 \le t \le 1$のとき,直線群$l_t : y=(2t-1)x-2t^2+2t$ の通過領域

$\Leftrightarrow g(t)=2t^2-2(x+1)t+x+y$が$0 \le t \le 1$に少なくとも１つ共有点をもつ$(x,y)$の条件

$\Leftrightarrow$（ア）$0 \le t \le 1$に２実解（重解）をもつ



$$\Leftrightarrow \begin{cases} D/4=(x+1)^2-2(x+y)\ge 0 \\ 0\le 軸 \le 1 \quad \therefore 0 \le \dfrac{x+1}{2} \le 1 \\ g(0)=x+y \ge 0 \\ g(1)=-x+y\ge 0 \end{cases}$$



［ファクシミリ方式］
［xを固定してtを変化させた時のyの値域(最大･最小)を考える］

$y=-2t^2+2(x+1)t-x$

$=-2(t-\dfrac{x+1}{2})^2+\dfrac{x^2+1}{2}$

$0 \le t \le 1$より場合分け必要

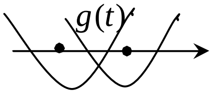
［連立させて$(x-\alpha)^2$の形となる曲線(包絡線)を見つけてしまう］

$y=\dfrac{x^2+1}{2}$とl_tよりyを消去すると

$(\dfrac{x+1}{2}-t)^2=0$を得る$\therefore\ x=2t-1$

で２つのグラフは接する.$0 \le t \le 1$より$-1 \le x \le 1$のときの接線群の通過領域より左図の領域

（イ）$0 \le t \le 1$に１解をもつ



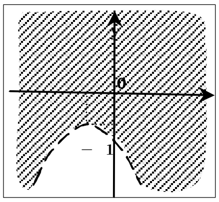
$\Leftrightarrow g(0)g(1)=(x+y)(-x+y)\le 0$

［類題］θがすべての実数値をとる時,直線群$y=(\cos\theta)x-\cos 2\theta$
の通過領域は$\cos\theta=t$として　$-1 \le t \le 1$のとき、
直線群$y=tx-(2t^2-1)$の通過領域に帰着

④ 円群$C_k : x^2+y^2+x+(2k+1)y+k^2+1=0$の通過しない領域

$\Leftrightarrow k$の方程式$k^2+2yk+x^2+y^2+x+y+1=0$が実数解をもたない(x,y)の条件

$\Leftrightarrow$判別式$D/4=y^2-(x^2+y^2+x+y+1)<0 \therefore y>-x^2-x-1=-(x+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{3}{4}$



（ウ）３次（パラメーター）→ ３次関数のグラフの形状からは難しい

$0 \le t \le 1$のとき,直線群$l_t : y=3(t^2-1)x-2t^3$の通過領域（東大）

$\Leftrightarrow g(t)=2t^3-3xt^2+3x+y$が$0 \le t \le 1$に少なくとも共有点をもつ$(x,y)$の条件

$\Leftrightarrow z=g(t)=2t^3-3xt^2+3x+y$のグラフが
t軸と$0 \le t \le 1$の範囲に共有点をもつ(x,y)の条件

$z'=g'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$, $g'(t)=0$より
$t=0,x$以下３次関数のグラフの形状から考える．場合分け必要

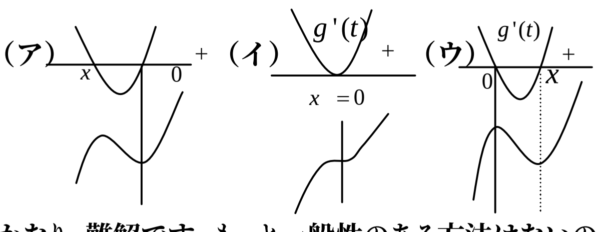
［１変数固定］$y=-2t^3+3x_0t^2-3x_0$

$y'=-6t^2+6x_0t=-6t(t-x_0)$

$t=0,x_0$　　$0 \le t \le 1$で増減表

［接線群を見抜く］$y=x^3-3x$の上の点(t,t^3-3t)における接線群である

$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$



ア・イ $x \le 0$のとき$g(0)\le 0 \wedge g(1)\ge 0$

ウ.$1<x$のとき$g(0)\ge 0 \wedge g(1)\le 0$

$0<x\le 1$のとき$g(x)\le 0 \wedge g(0)\ge 0$

$g(x)\le 0 \wedge g(1)\ge 0$

かなり　難解です。もっと一般性のある方法はないのでしょうか･

［知ツ得］包絡線（ほうらくせん）(envelope 包み)が判れば　通過領域が判る

$f(x,y,t)=(-3t^2+3)x+1y+2t^3=0$

$\dfrac{\partial f(x,y,t)}{\partial t}=(-6t)x+0y+6t^2=0$

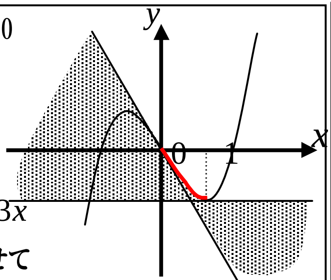
$\begin{cases} x=t \\ y=t^3-3t \end{cases}$ からtを消去して

通過領域の境界である包絡線$y=x^3-3x$

を得る。「＊」l_tと$y=x^3-3x$を連立させて

$(x-t)^2(x+2t)=0$ $x=t$(重解), $-2t$で, 接点のx座標tが

$0 \le t \le 1$より通過領域は上図。［コツ］いきなり「＊」から答案を書き出す



［大学］微分幾何学の内容ですが

定義　曲線群$\{C_\alpha\}$が与えられたとき、すべてのC_αに接する曲線Cを曲線群の包絡線（ほうらくせん）という

公式　曲線群$\{C_\alpha\}$が方程式
$f(x,y,\alpha)=0$で与えられているとき, 包絡線は

$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$

から　αを消去した式で与えられる。

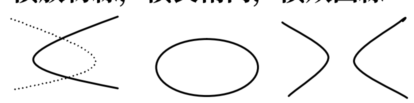
１４　２次曲線（理系）

（１）[Def.]　**放物線** ⇔ １定点（焦点）と１定直線（準線）からの距離が等しい点の軌跡
楕　円 ⇔ ２定点（焦点）からの距離の和が一定な点の軌跡
双曲線 ⇔ ２定点（焦点）からの距離の差が一定な点の軌跡

[参考]１定点からの距離が等しい（円），交わる２定直線からの距離が等しい（角の２等分線）
２定点からの距離の比 k が一定（$k=1$ のときは直線，$k\neq 1$ のときアポロニウスの円）

（２）標準形

横放物線，横長楕円，横双曲線



放物線 $y^2=4px\ (p\neq 0)$ 焦点 $F(p,0)$，準線 $l: x=-p$

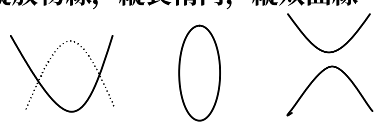
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0)$　焦点 $F(\sqrt{a^2-b^2},0)$，$F'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ からの和が $2a$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 焦点 $F(\sqrt{a^2+b^2},0)$，$F'(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ からの差が $2a$

漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$（形式的に左辺＝０から得られる）

x,y の立場を交換したものが以下の形

縦放物線，縦長楕円，縦双曲線



放物線 $x^2=4py\ (p\neq 0)$ 焦点 $F(0,p)$，準線 $l: y=-p$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad (b>a>0)$　焦点 $F(0,\sqrt{b^2-a^2})$，$F'(0,-\sqrt{b^2-a^2})$ からの和が $2b$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,b>0)$　焦点 $F(0,\sqrt{a^2+b^2})$，$F'(0,-\sqrt{a^2+b^2})$ からの差が $2b$

漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$（形式的に左辺＝０から得られる）

(p,q) だけ平行移動したものは① $f(x-p,y-q)=0$
②各座標に (p,q) だけ加える

２次曲線の回転による標準化

$ax^2+2bx+2cy+dy^2=$
$\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ を対角化行列
$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}$ で
変換すると $R^t=R^{-1}$ だから
$\begin{pmatrix} X & Y\end{pmatrix}R^{-1}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}R\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}$
$=\alpha X^2+\beta Y^2$

（３）２次曲線の一般形　$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

[重要]係数からの２次曲線の分類問題

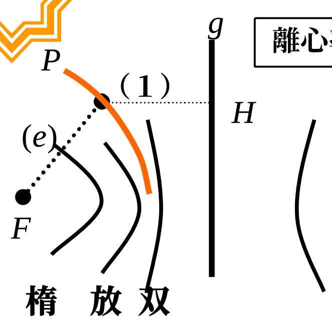
一般形と分類 $Ax^2+By^2=1$ は $(A\neq 0, B\neq 0)$

$$\begin{cases} A=B>0 & \text{のとき，円}\\ A>0, B>0 & \text{のとき，楕円}\\ AB<0 & \text{のとき，双曲線}\\ A<0, B<0 & \text{のとき，図形を表さない}\end{cases}$$

[２次曲線の分類]
変換して次の形に
$x^2+y^2=1$
$x^2-y^2=1$
$y^2=x$　２直線も
[３次曲線の分類]難

（４）焦点 F と準線 g との距離の比が $e=\dfrac{PF}{PH}$ を満たす点 P の軌跡

離心率からの２次曲線の分類



$$\begin{cases} 0<e<1 & \text{のとき，楕円}\\ e=1 & \text{のとき，放物線}\\ 1<e & \text{のとき，双曲線}\end{cases}$$

離心率
$e=\dfrac{PF}{PH}$
$=\dfrac{\text{曲線上の点から焦点までの距離}}{\text{曲線上の点から準線までの距離}}$

[コツ]放物線の定義には「長さが等しい」という部分があり，必ず２等辺三角形が作れるので幾何学的性質を利用することが有効である．

（5）２次曲線のパラメーター表示

> [重要]　図形 $F(x,y)=0$ 上の点 P の表現方法
> ① $F(x_0,y_0)=0$ をみたす $P\ (x_0,y_0)$
> ②媒介変数で表示　$P(f(t),g(t))$
> ③うまく極・始線をとり極形式で表す $P(r,\theta)$

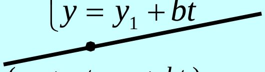
① **放物線**　$y^2=4px \Leftrightarrow \begin{cases} x=pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$

② **円**　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$　$(r>0)$

$x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

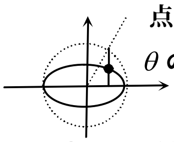
点 $(-r,0)$ は除く $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2rt}{1+t^2} \end{cases}$

$\leftarrow t=\tan\theta$ の置き換えで

> **直線は**
> **１点と方向ベクトルで**
> $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$
> $\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}$
>
> 
>

③ **楕円** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$　$(a>0,b>0)$

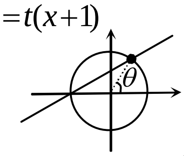
点 $(-a,0)$ 除外 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$



θ **の場所に注意**

④ **双曲線** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$　$(a>0,b>0)$

点 $(-a,0)$ は除く $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a(1+t^2)}{1-t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1-t^2} \end{cases}$

> **三角関数の有理関数化**
> $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ の時
> $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$
> $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
> $\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$
> $y=t(x+1)$
>
> 
>

> **重要な媒介変数表示される曲線**
>
> **サイクロイド**
> $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$　$(a>0)$
>
> **トロコイド**
> $\begin{cases} x=a\theta-b\sin\theta \\ y=a-b\cos\theta \end{cases}$　$(a,b>0)$
>
> **アステロイド**　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ は1象限のみ
> $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$
>
> **リサージュ曲線**
> $\begin{cases} x=\sin mt \\ y=\cos nt \end{cases}$　$(0\le t\le 2\pi)$
>
> **アルキメデスの螺旋**（らせん）
> $\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow r=\theta$
>
> **スパイラル曲線**
> $\begin{cases} x=e^{-\theta}\cos\theta \\ y=e^{-\theta}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow r=e^{-\theta}$

[話題]（有理関数化の整数論への応用）　ピタゴラス数 $x^2+y^2=z^2$　$(x,y,z\in I)$ は無限に存在する

証　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　に三角関数の有理関数化の公式より　$\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$

$\therefore (1-t^2)^2+(2t)^2=(1+t^2)^2$　この式に $t\in I$ を代入して，ピタゴラス数が無限に得られる

> **空間の直線･平面は**
> **媒介変数表示が重要**
> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

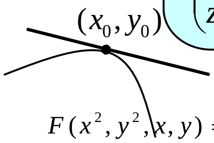
（6）円・楕円・放物線・双曲線の接線の公式　極線の公式

① **曲線** $F(x^2,y^2,x,y)=0$ **の上の点** (x_0,y_0) **における接線[知ッ得]**

> これは暗記しておくこと

形式的に $x^2\to x_0x$　$,y^2\to y_0y$　$,x\to\dfrac{x+x_0}{2}$　$,y\to\dfrac{y+y_0}{2}$ と置き換える

> 例 $y_0y=4p\dfrac{x+x_0}{2}$，　$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，　$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$
> $x_0x+y_0y=r^2$，　$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$



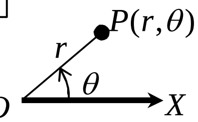
② **傾きが m の接線**

円	$x^2+y^2=r^2$	の傾きが m の接線は	$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
楕円	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	の傾きが m の接線は	$y=mx\pm r\sqrt{a^2m^2+b^2}$
放物線	$y^2=4px$	の傾きが m の接線は	$y=mx+\dfrac{p}{m}$

> 暗記する必要はない
> $y=mx+k$　と
> おき D=0 から

１５ 極座標と極方程式（理系）

回転量で測った弧度法での角

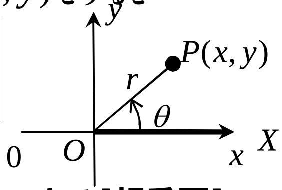


（１）[Def.]極座標　極Oからの距離と始線OXからの角で表した座標
直交座標$Ox-Oy$に原点Oを極，半直線OXを始線とする極座標を対応させることが標準

（２）極座標変換　原点を極，x軸の正の向きを始線とする座標系では
点Pの極座標(r,θ)、点Pの直交座標(x,y)とすると

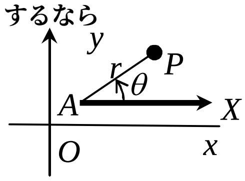
重要

極座標変換式 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



$r=\sqrt{x^2+y^2}$ も利用　　$r>0$

$A(p,q)$を極
下図のようなＡＸを始線とするなら



$\begin{cases} x = r\cos\theta + p \\ y = r\sin\theta + q \end{cases}$

極方程式$r=f(\theta)$は媒介変数表示にできる[超重要]

$$r=f(\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

関数の表現方法の変換

x,yによる表示　$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$　極方程式

ｔの消去・ｔで表現

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

パラメーターを消去すると動きは無くなるが

点Pが図形上にある条件を
①極座標(r,θ)の関係式で表したものが極方程式
②位置ベクトルで表したものがベクトル方程式
③（x,y）で表したものが普通の方程式

（３）極座標と三角形の面積　極O，$A(r_1,\theta_1), B(r_2,\theta_2)$のとき$S=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin|\theta_1-\theta_2|$

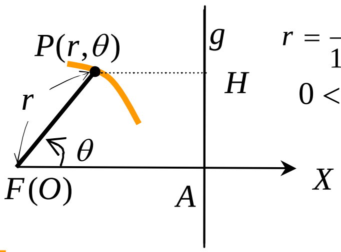
（４）極方程式の$\boxed{\text{例}}$　[注意]$r>0; (-r,\theta)=(r,\theta+\pi)$とみなすものとする

こんなのとても覚えられません．変換で求めたり(r,θ)を直交座標として表示参考してグラフをイメージする

①**直線**　極（原点）を通り，始線となす角が定角$\alpha \Leftrightarrow \theta=\alpha$，$r$は任意
始線（x軸）に垂直　$x=a \Leftrightarrow r\cos\theta=a$
極（原点）を通らない一般の直線$\Leftrightarrow r\cos(\theta-\alpha)=p$

②**円**　極（原点）中心の半径aの円　$x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow r=a$，$\theta$は任意
始線上に中心をもち，極（原点）を通る半径$a\ (>0)$の円
$(x-a)^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow r=2a\cos\theta$

③**２次曲線**　$FP:PH=e:1$　から$r:|a-r\cos\theta|=e:1$　より



$r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$　または　$r=\dfrac{-ea}{1-e\cos\theta}$
$0<e<1$ **楕円**　$e=1$ **放物線**　$1<e$ **双曲線**

[重要]極は原点とは限らない
焦点に関連する長さFA, FBと言えば極を焦点とする極座標が有効

・２次曲線は焦点Fを極，準線を始線に垂直な極座標が有効
さらに，この焦点Fを原点Oとする直交座標系への変換をする
・２次曲線の中心を極とすると複雑になる

④ **$r=f(\theta)$の形は媒介変数表記が有効→接線・面積・体積・曲線の長さ**

ⅰ)カージオイド（心臓形）　$r=1+\cos\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$

ⅱ)正葉曲線(バラ曲線)（せいよう）　$r=\sin n\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin n\theta\cos\theta \\ y=\sin n\theta\sin\theta \end{cases}$

ⅲ)スパイラル曲線　$r=e^{\theta}$，　$r=e^{-\theta}$

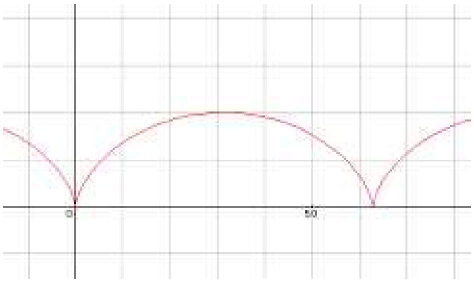
$r=f(\theta)$の形の一番単純なのが
ⅳ)アルキメデスの螺旋（らせん）
$r=\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$
（京大）はシンプルなのが好き　$\beta^2=\alpha$，
$A^3=A$，$\tan 1^\circ$など

１６ いろいろな曲線の概形（理系）

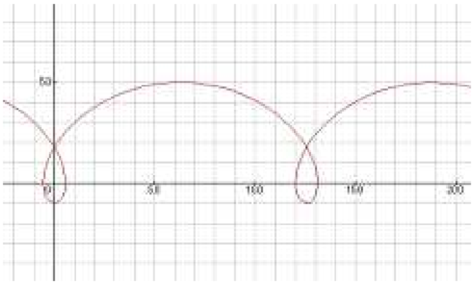
Ori.

関数のグラフのフリーソフト紹介 Easy Graph hiroshima-cdas.or.jp/home/hamada/

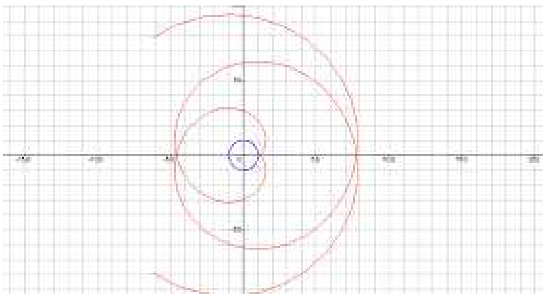
①サイクロイド $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a=1)$



②トロコイド $\begin{cases} x = a\theta - b\sin\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$ $(a=2, b=3)$



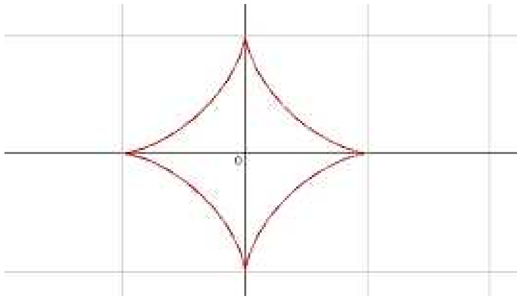
③インボリュート $\begin{cases} x = \cos\theta + \theta\sin\theta \\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta \end{cases}$



④アステロイド $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ $(a=1)$

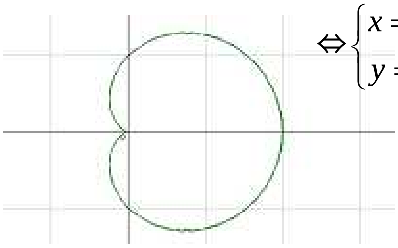
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

［注意］ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ と書くと $x>0, y>0$（第１象限のみ）

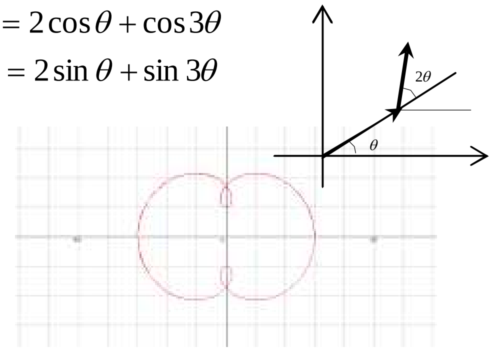


⑤カージオイド（心臓形） $r = 1 + \cos\theta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$

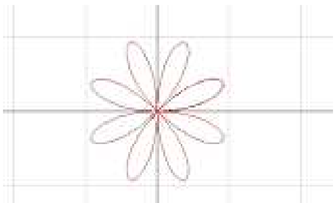


⑥ $\begin{cases} x = 2\cos\theta + \cos 3\theta \\ y = 2\sin\theta + \sin 3\theta \end{cases}$



⑦ 正葉曲線

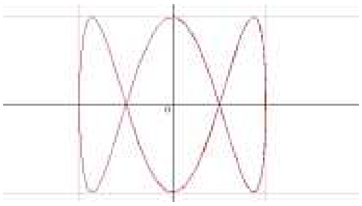
$r = \sin n\theta \quad (n=4)$



⑧リサージュ曲線

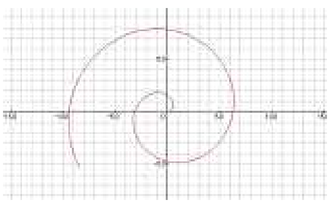
$\begin{cases} x = \sin mt \\ y = \cos nt \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$

$(m=1, n=3)$



⑨ アルキメデスの螺旋

$r = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases}$



17 平面幾何の定理

（１）[Def.]三角形の五つの中心（五心）の定義（重心，垂心，内心，外心，傍心（ぼうしん））と話題

重心G $\overset{def}{=}$ 中線の交点，中線を２：１に分ける点，重心の位置ベクトルの公式 $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

垂心H $\overset{def}{=}$ 垂線の交点，内積＝０，交点ベクトル問題

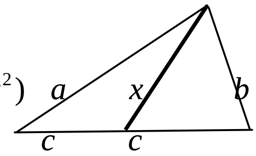
内心Ｉ $\overset{def}{=}$ 角の２等分線の交点，内接円の半径 r といえば $S=sr$，交点ベクトル問題

外心O $\overset{def}{=}$ 垂直２等分線の交点，外接円の半径 R といえば正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

傍心 I_1, I_2, I_3 $\overset{def}{=}$ １内角と２外角の２等分線の交点．　交点ベクトル問題（神戸）

（２）三角形に関する定理

[Th.]①中線（ﾊﾟｯﾌﾟｽの）定理と中線 x の長さ　$a^2+b^2=2(x^2+c^2)$



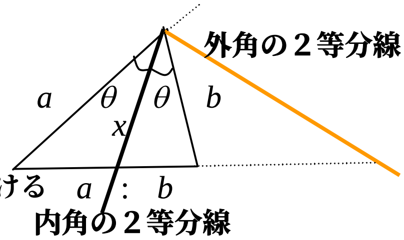
②相似な三角形の対応する辺の比は等しい

③角の２等分線の性質[重要]と２等分線 x の長さ

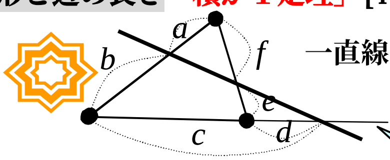
$$\frac{1}{2}ab\sin 2\theta=\frac{1}{2}ax\sin\theta+\frac{1}{2}bx\sin\theta$$

角の２等分線といえば，対辺を $a:b$ の比に分ける[超重要]

外角の２等分線は対辺を $a:b$ の比に外分する＝$a:-b$ に分ける

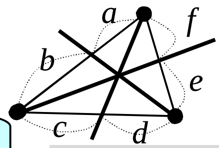


三角形と辺の長さ「積が１定理」[Th.]④メネラウスの定理[重要]　[Th.]⑤チェバの定理[重要]



一直線上⇔ $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{e}{f}=1$

コンニャクに串１本と見よ

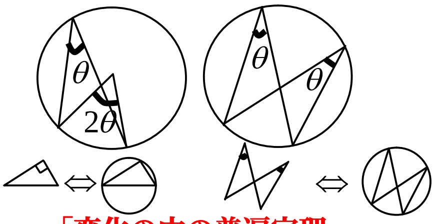


１点で交⇔ $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{e}{f}=1$

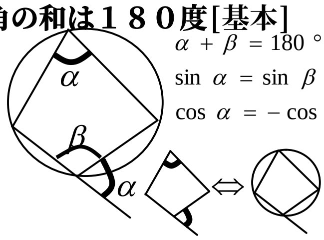
定理の逆も成立[重要]

（３）円に関する性質と定理

円と角[Th.]⑥円周角・円周角の定理[基本]　⑦内接する四角形の向かい合った角の和は１８０度[基本]　[Th.]⑧接線と弦の作る角の定理[接弦定理][基本]



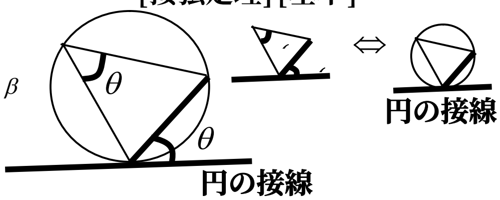
「変化の中の普遍定理」



$\alpha+\beta=180°$

$\sin\alpha=\sin\beta$

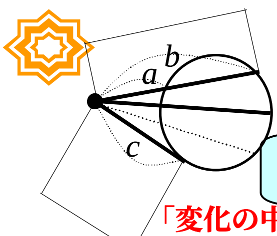
$\cos\alpha=-\cos\beta$



円と辺の長さ[Th.]⑨方べきの定理[重要]

「方べき」の由来は正方形の面積に等しい長方形の作図問題から

定理の逆[重要]4点の共円条件
⑥2角が等しい (円周角)
⑦対角が補角 (外角＝内対角)

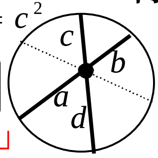


円⇔ $ab=a'b'=c^2$

団子に串２本と見よ

「変化の中の普遍定理」

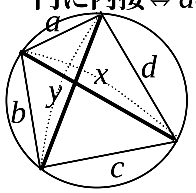
円⇔ $ab=cd$

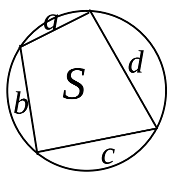


同一点を通る串の長さの積はすべて同じ

[Th.]⑩[参考]トレミーの定理

円に内接⇔ $ac+bd=xy$





[参考]ブラマグプタの公式　円に内接する四角形の面積 S は

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\qquad s=\frac{a+b+c+d}{2}$$

（$a=0$ のときヘロンの公式）

１８ 空間図形 [Quiz]楊枝6本で正三角形を4つ作りなさい。 [hint]空間図形 [答]正四面体

（1）空間直線　空間平面　球面　４面体　立方体　の性質や位置関係

京大は論証問題,
東大は空間図形

[道具]ユークリッド，デカルト，ベクトル，対称性を使う[コツ]

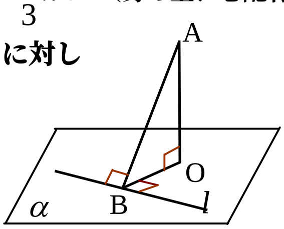
[覚え方]球の表面積 $S = 4\pi r^2$（心配ある事情），球の体積 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$（身の上に心配有りて参上）

（2）[Th.]３垂線の定理　平面 α 外の定点 A と α 上の直線 l に対し

$$(AO \perp \alpha) \wedge (AB \perp l) \Rightarrow OB \perp l$$

$$(AO \perp \alpha) \wedge (OB \perp l) \Rightarrow AB \perp l$$

$$(AB \perp l) \wedge (BO \perp l) \wedge (AO \perp OB) \Rightarrow AO \perp \alpha$$



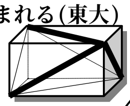
[知ッ得]　対称性や三平方の定理で解けることも多い

（3）特に四面体が重要（平面の三角形の空間への拡張が四面体とみれば重要性が理解できよう）

空間ベクトルで解くのが一般的（対称性・双対性を利用）

一般四面体

等面四面体は直方体に
埋め込まれる(東大)

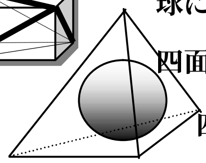


等面四面体（各面が合同）

正四面体（体積は $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$）

３直角四面体

直稜（ちょくりょう）四面体（向かい合った３組の辺が垂直）



[重要な話題]

球に内接する四面体

四面体の内接球の半径は $V = \dfrac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$

四面体の体積から垂線の長さが求まる

（4）非回転体の体積[花ﾌﾟﾘ]

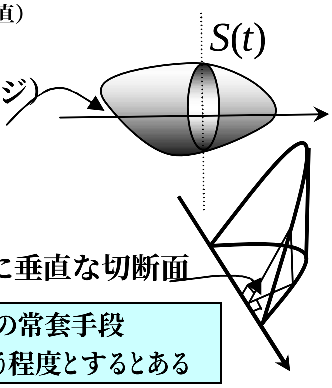
手順１　図を描く（イラスト的にイメージ）

手順２　軸を決める　複雑な文字＝t

手順３　軸に垂直な切断面を考える

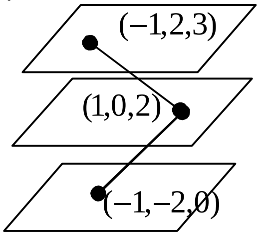
手順４　切断面の面積 $S(t)$ を求める

手順５　$V = \int_a^b S(t)dt$　を計算する　軸に垂直な切断面



[CTスキャン]　断面を見るのは立体の形を知るための常套手段
指導要領に　空間図形の方程式は $z = k$ の形を扱う程度とするとある

[秘伝][good idea]空間内の点をイメージする図の描き方
高さの平面（フロアー）をかくと非常によく位置関係が判る！



（5）空間内の格子点

手順１　$Z = k$　（x, y は任意）の $x - y$ 平面における図を描く

手順２　$Z = k$ のときの　格子点の数 $N(k)$ を求める

例えば $x = p$ と固定しての数 $M(p)$ を p, k の式で求め

$\sum_p M(p)$ として $N(k)$ を求める

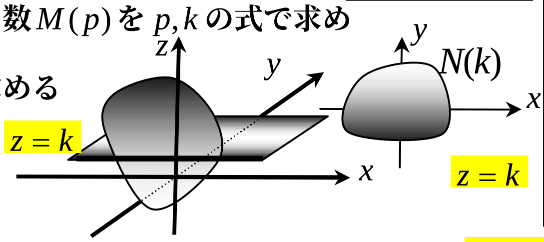
手順３　$\sum N(k)$ を計算する

[コツ]一番複雑な文字を $= k$ とおく

[大学]
・特異点＝滑らかでない点

・立体のかたちは「切って」「見て」「触って」研究

・とくに「切って」は受験で重要

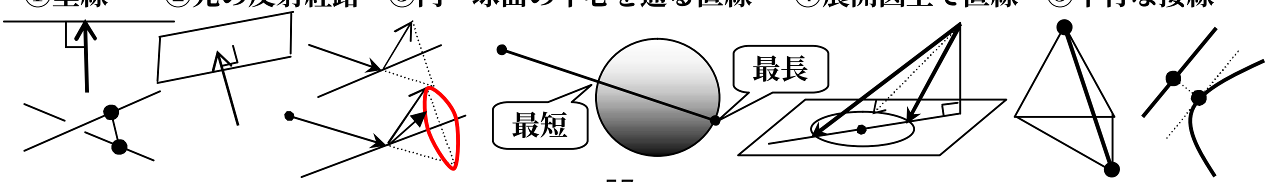


（6）連立不等式の表す立体の体積･格子点など→図を描くのが難→断面積 $(z = k)$ を考える

（7）最短距離は図形的に追え

ヘロン「自然はムダをしない」，フェルマー「自然は最も近い道をとって行動する」，「最小作用の原理」，表面積が最小＝球：水滴，猫はコタツで丸くなる

①垂線　②光の反射経路　③円・球面の中心を通る直線　④展開図上で直線　⑤平行な接線



19 グラフ・図形(易)を介して考える方程式・不等式(難)

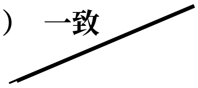
（1）連立1次方程式⇔まず2直線の位置関係で図形的に⇔行列で表現すればどうなるか考える

例1 $A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}ax+by=p\\cx+dy=q\end{cases}$ を解け．　←一般的な2直線

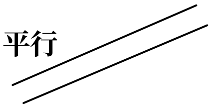
解　2直線の位置関係に対応して

ア）1点で 交わる

イ）　一致



ウ）　平行



ア）$\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$（$A^{-1}$がある）とき $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ の1解　イ）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{p}{q}$ のとき無数　ウ）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\neq\dfrac{p}{q}$ のとき解なし

[比較] $ax=b$（ア）a^{-1}があるとき，$x=a^{-1}b$

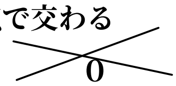
（イ）$a=0$ のとき，$0x=b$ となり　$b=0$ ならすべての実数　$b\neq 0$ なら解なし

原点を通る2直線の一致条件の表現
$\Delta=\Delta(A)=0$
$ad-bc=0$
$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$,
A^{-1} が存在しない,非正則

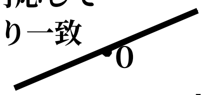
例2 $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}ax+by=0\\cx+dy=0\end{cases}$ を解け．←原点を通る2直線

解　原点を通る2直線の位置関係に対応して

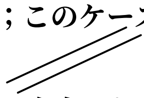
ア）　原点で交わる



イ）原点通り一致



平行；このケースはない



ア）$\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$（$A^{-1}$がある）とき $\vec{x}=\vec{0}$ の1解，　イ）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$（$A^{-1}$が存在しない）とき無数

[比較]　$ax=0$（ア）a^{-1}があるとき $x=0$

（イ）$a=0$ のとき $0x=0$　すべての実数

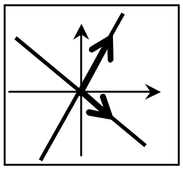
ゆえに，　$ax=0$　が $x=0$ 以外の解をもつ $\Leftrightarrow$ $a=0$

$A\vec{x}=\vec{0}$ はアイの2ケースのみより
（公式）$A\vec{x}=\vec{0}$ が $\vec{x}=\vec{0}$ 以外の解をもつ
$\Leftrightarrow \Delta(A)=ad-bc=0$

例3 $A\vec{x}=k\vec{x}\wedge\vec{x}\neq\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}ax+by=kx\\cx+dy=ky\end{cases}$ $(x,y)\neq(0,0)$ を解け

このとき $\vec{x}$ を A の固有ベクトル，k を A の固有値という。存在するとは限らない

解 $A\vec{x}=k\vec{x}$ は $A\vec{x}-k\vec{x}=\vec{0}$ より $(A-kE)\vec{x}=\vec{0}$ となるから上の公式より



$\vec{x}\neq\vec{0}$ なる解を有する(固有ベクトルを有する) $\Leftrightarrow \Delta(A-kE)=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-k&b\\c&d-k\end{pmatrix}$ の行列式の値 $\Delta=(a-k)(d-k)-bc=0$

$\Leftrightarrow k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0$（固有方程式という）

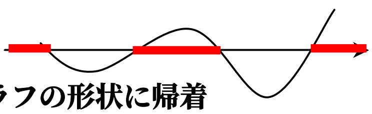
この解 k_1，k_2 を A の固有値という　　$\boxed{\text{以下略}}$

[関連] 行列 $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$ の様々なプロパティー $tr=7, \Delta=10$，$A^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-1\\-2&3\end{pmatrix}$，正則変換

$\therefore$ケーリー・ハミルトン $A^2-7A+10E=O$，$\therefore$固有方程式 $k^2-7k+10=0$ $\therefore$固有値 2,5

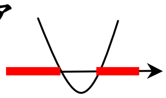
$\therefore$ 固有ベクトル $t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $t\neq 0$，$s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $s\neq 0$ $\therefore$対角化行列 $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$

（2）2次不等式・高次不等式もグラフを介して考える

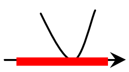


$ax^2+bx+c\geqq 0\ (a\neq 0)$　の解は $y=ax^2+bx+c$ のグラフの形状に帰着

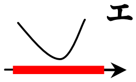
ア



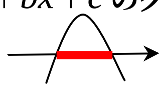
イ



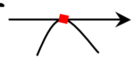
ウ



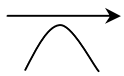
エ



オ



カ



解は，

$x\leq\alpha$，$\beta\leq x$，すべての実数，すべての実数，$\alpha\leq x\leq\beta$　，$x=\alpha$　，解はなし

[あのね]　昔、中国で幾何の授業の前に生徒が黒板に書いていたという。

人生幾何(いくばくぞ)
人生在世有幾何
何必苦苦学幾何
学了幾何有幾何
不学幾何又幾何

「幾何」（いくばくぞ）の意味
　幾何学
　さまざまな形やいろいろな人生
　どれほどか？いくばくぞ？　短い、少ない、
　どうしょうもない
　どれほどのものを得失するのか、たいしたことない

[解釈Ａ]
この世の人生は短い
なぜ苦労して幾何を学ぶのか
幾何を勉強したら生活はどれほど良くなるのだろうか
幾何を学ばなかったとして、どれほど悪くなるだろうか

[解釈Ｂ]
この世の人生はさまざま（面白い人生もあるのに）
なぜ苦労して幾何を学ぶのか
（なるほど）幾何を勉強すれば、それなりにいろいろの人生があるだろうが
幾何など勉強しなくても又いろいろの人生の選択があるではないか。