Ⅰ　数学基礎論

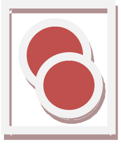
――― 論理 ―――

（会話・討論）→（論理）→「論理学」→「記号論理学」→「ブール代数学」→コンピューター

～	∧	∨	→	∀	∃
Not	*And*	*Or*	*if then*	*All*	*Exist*

↔が加わることも
If and only if

近代論理学は論理の基礎 ,この6つの論理記号にたどり着いた



注意　**2つの命題に対して →と⇒を区別せよ**

6つ(7つ)の論理演算の記号の1つである→ （2つの演算） と

⇒ 含意 （2つの関係）　　2つのベクトルの演算と1次独立性に似たり

不完全性定理の方が有名ですが

◆ゲーデルの完全性定理(completeness theorem)

数学ではいろいろたくさんの概念を定義するのであるが、それを論理的に分析してみると、

¬(否定)　∧(そして)　∨(または)　→(ならば)　∀(すべての)　∃(存在)

の論理的概念と, 今取り扱っている数学的特有な基本的概念 (＝ ＜ ＋ ･･･)の組み合わせでできている。こういう分析による研究は前世紀から徐々に進んできて、今世紀の初めのころに完成されたと思ってよい。(ライプニッツ、ド･モルガン、ペアノ、ラッセル････)

この研究の結果、数学の証明というものは、少数の数学的公理から出発して、上述の論理記号についての数少ない簡単な規則を何回も何回もくり返して用いてできたものであることがわかってきた。これは大きな成功であった。

ここで当然の疑問が湧いてくる。この有限個の論理法則のほかに何か別の論理法則がありうるのであろうか？　すなわち　われわれの論理法則は完全であろうか？

ゲーデルが次の定理を証明した。「**われわれの論理は完全である　すなわちもし公理群Γから命題Pがわれわれの論理で証明されないときは, Γと$\neg P$とを同時に満たすようなモデルを構成することができる**」

◆論理は厳密に数学を行う基礎の部分であり、大学入試でも本質を理解しているか問われる

○**問**「$n \in N$ ： $p(n)$」、「$\forall n \in N : p(n)$」、「$\exists n \in N : p(n)$」**の違い判りますか**

　例「$n \in N$ ： $n > 2$」は$n = 3,4,5,\cdots$で真となる述語

「$\forall n \in N : n > 2$」は全称命題で偽の命題, 「$\exists n \in N : n > 2$」は存在命題で真の命題

答「$n \in N$ ： $p(n)$」は自然数に関する述語 ,「$\forall n \in N : p(n)$」は全称命題

　「$\exists n \in N : p(n)$」は存在命題

○[こんな人がいます]

「$n \in N$ ： $p(n)$」と「$n \in N$ ： $p(n) \to p(n+1)$」はまったく違う自然数に関する述語である。また, ①「$\forall n \in N : p(n)$」と②「$\forall k \in N : p(k) \to p(k+1)$」は違う全称命題である.①が真である事の証明を②に帰着させるいうのが数学的帰納法による証明の原理であるが　②の証明を

$n = k$のとき$p(k)$が成り立つと仮定するとkを$k+1$に置き換えて$p(k+1)$も成り立つとあっという間に終わる。これは暴挙というしかない。kのとき成り立てば$k+1$のとき成り立つなんて？（$k = 5$　なら$k+1 = 5$　というようなもの）

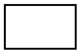
②の$\forall n \in N :$は$p(n)$にかかるのではない：「$p(n) \to p(n+1)$」全体にかかる.

――― 同値 ―――

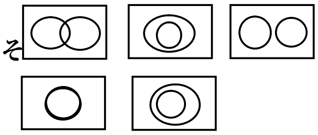
数学は同値性の学問である。同値とは表現は違うが内容は同じということ。
同値なものはたくさんあるができるだけ異質なものを見つけたい。

[前提条件]

$p \quad \Leftrightarrow \quad q$



前提条件で　ユニバースを明確に　その中での集合の関係を考察している



◆　[→と⇒についてはっきりさせよう]

「$p \to q$」や「pならばq」は、真偽は不問の単なる言い回し，これが真（トートロジー）の時「$p \Rightarrow q$」,「$p \to q$が成り立つ」,「$p \to q$は真」,「$p \xrightarrow{\bigcirc} q$」と書くことに私はする

◆　[$p \to q$]は, pならば<u>例外なく</u>qであるということ

この例外のことを数学用語では反例という

$x \Rightarrow y \Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow t \Leftrightarrow u$

$r \Rightarrow s \Rightarrow$

pから　ならば、ならばで得られるものはすべてpの必要条件。　ならばでpが得られるものはすべてpの十分条件である。

◆　[$p \Leftrightarrow q$の証明法]

① pを同値変形してqを示す.　$p \Leftrightarrow \Delta \Leftrightarrow q \therefore p \Leftrightarrow q$

②（ア）$p \Rightarrow q$と（イ）$q \Rightarrow p$を示す

③ [$p \Rightarrow q$]は、真理集合が$P \subset Q$　と同値

よって真理集合を図示して$P = Q$をいう

[超重要] p,qの仲を取りもつものΔは，グラフ・図が有効

[要注意]　数学用語
①または　②ならば
は日常用語と異なるので要注意！各々日本語の日常用語では
①「少なくとも一方」
②「～であって～でないものはない」つまり「ならば例外なく」の意味である。

◆基本的に, 数学における変形は同値変形であり, $\Leftrightarrow$　と明記することが大切.
「ならば」で得られる条件は必要条件である. (あとで十分性のチェックをすることも)
∴, より, だから, ゆえに, なぜなら　を　$\Rightarrow$　$\Leftarrow$　$\Leftrightarrow$　に置き換えたらどうなるかを常に意識して論理力をつけること.

日常語→日本語→英語→数学用語→記号→代数→01　　と，どんどん抽象化してきた。日常語で国語的にいくら考えても,余計に判らなくなる。数学の<u>２値論理（○か×で△はない）</u>にあった日常語に修正してやらないといけない。ならば　に　例外なくを付けて２値論理になる

■　数学用語は日常の用語とは違う　**「数学用語」はすべて「集合の関係で厳密に定義」される**

または　「うどん<u>または</u>そばを食べる」、数学では,<u>少なくとも一方</u>の意味で, 両方食べることもＯＫ $P \cup Q$

ならば　「赤ちゃん<u>ならば</u>かわいい」(真？)数学では「赤ちゃん<u>ならば例外なく</u>かわいい」(偽)　$P \subset Q$

「合格した<u>ならば</u>車を買ってあげる」という約束　数学では　合格しないとき買ってあげても約束どおり

■もとの命題とその対偶とは真偽(しんぎ)は一致する　$[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow P \subset Q \Leftrightarrow \overline{Q} \subset \overline{P} \Leftrightarrow [\overline{q} \Rightarrow \overline{p}]$

$\boxed{\text{問い}}$　「叱られない→勉強しない」の対偶は「勉強する→叱られる」？

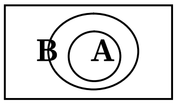
対偶は「勉強する→（その前に）叱られている」（時間的経過も考えて??）

$\boxed{\text{正解}}$　・数学では「pならばq」の「ならば」は因果関係を示しているのではなく<u>状態の結びつき</u>を示しているだけ

「叱られない人　ならば　勉強しない人」　←対偶→　「勉強する人　ならば　叱られる人」　と集合で明解に

・「おなかが減ったらご飯を食べる」←対偶→「ご飯を食べなければおなかが減らない」（誤）　も同様

Ａ：おなかが減った人　Ｂ：ご飯を食べる人　と元の主張を集合的に書き直してから対偶を考える事　(集合に戻れ)



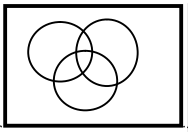
[あのね]　∵は「なぜならば」，　∴　は　「よって」，　∴∴∴は？　　　　　　　　　「茶畑」

[あのね]　「宣誓　何事も隠さずまた何事も付け加えないことを誓います」（数学は必要十分の学問）

[あのね]　Ｕ＝私の主張すべての集合　として「私の言っている事はすべて嘘です」の真偽は？

im•ply /ɪmplάɪ/ 動 他 1　〈…を〉(必然的に)含む，伴う，含蓄する；〈…の〉意味を暗に含む，〈…を〉(暗に)意味する.2a　〈人・態度などが〉〈…を〉暗示する，ほのめかす b 〔+(that)〕〈人・態度などが〉〈…ということを〉暗示する，ほのめかす.〘ラテン語「包み込む」の意; 名 implication 1〙

6　集合(set)と論理（logic）



集合と論理の演算法則　一部

$A\cup B=B\cup A$，$p\vee q=q\vee p$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ ，$\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$

（1）集合　集合($\in\notin\cup\cap\ \bar{\ }$)と写像 mapping(省略)

[Def.] $n(A)$：有限集合 A の要素の個数，$\overline{A}$：補集合

[Th.]個数定理 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　ダブルカウント分の調整を

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

[Th.]集合のド・モルガンの法則 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（2）命題と命題論理（2値論理　、多重論理　ファジー論理もあるが）

[Def]命題（Proposition）とは真偽(２値)が判定されうる文 p,q,r .

[Def]命題の結合と真偽：p,q を単一命題とし，次の論理演算を定義

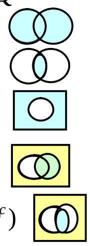
条件文は特に重要

- 否定　$\sim p$　（でない　not，$\overline{p}$　p'　$\neg p$ と書くことも）
- 論理和 $p\vee q$　（または or，どちらか一方でなく少なくとも一方）
- 論理積 $p\wedge q$　（かつ　and，$\begin{cases}p\\q\end{cases}$ と書くことも，カンマはかつ？）
- 条件文 $p\rightarrow q$　（ならば，if p then q，p を仮定 q を結論という）

合成命題と真理集合の対応

p,q の真理集合 P,Q

$p\vee q$	$\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}$	
$p\wedge q$	$\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$	
$\overline{p}$	P^c	
$p\rightarrow q$	$\mathrm{P}^c\cup\mathrm{Q}$	
$p\leftrightarrow q$	$(P^c\cup Q)\cap(P\cup Q^c)$	



双条件文 $p\leftrightarrow q$（p ならば q　かつ　q ならば p，p *if and only if* q，iff）

[コツ]数学用語「p ならば q である」は「p であって q でないことはない」を意味(定義)

よって，$\overline{p\wedge\overline{q}}=\overline{p}\vee q$ より $p\rightarrow q$ の真偽は $\overline{p}\vee q$ の真偽と一致させる

「→ は　ならば例外なく　と意味読みせよ」　ファジー論理でないので

論理記号
$\vee,\wedge,\neg,\rightarrow,\leftrightarrow$
論理演算の定義
論理演算の基本公式
優先順位 () ～∧∨
真理値表

[Def]条件文と 逆（ぎゃく）・裏（うら）・対偶（たいぐう） 前提条件のもとで

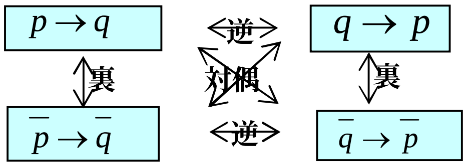
真偽は別としてならばと否定を使った言い回しに対してのことば遊び

条件文「$p\rightarrow q$」$(\overline{p}\vee q)$ に対して

「$q\rightarrow p$」$(\overline{q}\vee p)$ をもとの命題の逆，

「$\overline{p}\rightarrow\overline{q}$」$(p\vee\overline{q})$ をもとの命題の裏，

「$\overline{q}\rightarrow\overline{p}$」$(q\vee\overline{p})$ をもとの命題の対偶という．



単一命題の真理値と合成命題の真理値の関係を考える　T:true　F:fulse　命題論理は命題に関する演算と考えられる。（命題そのものの真偽は数学以前の問題として立ち入らない）

p	～p
T	F
F	T

真理値表

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	p∧q
T	T	T
T	T	F
F	T	F
F	F	F

p	q	~p∨q	p→q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

[Def]命題の同値　２つの命題 p,q はその真理値表が一致するとき，等しい　または　論理的に同値　といい　$p\equiv q$　と表す。（真偽が一致であって常に真とは違う）

p	q	p→q	~p	~q	~q→~p
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T

[重要]　もとの命題とその対偶とは真偽（しんぎ）は一致する

$$[p\rightarrow q]\equiv[\overline{q}\rightarrow\overline{p}]」$$

- 直接証明が難しい場合その対偶で証明してもよい
- 「逆は必ずしも真ならず」
- [あのね]「裏の裏は？表　，裏の裏の裏の裏は？」
　(こんなこと言ってたら山本リンダが出てきてしまいます)

同値な命題の例

- $p\vee p\equiv p$　，$p\vee q\equiv q\vee p$ (交換法則)
- $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ (結合法則)
- $\overline{\overline{p}}\equiv p$　(2重否定の法則)，
- $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ (分配法則)
- 「$p\rightarrow q$」$\equiv\overline{p\wedge\overline{q}}\equiv\overline{p}\vee q$ (ならばの意味)
- $\overline{p\rightarrow q}\equiv p\wedge\overline{q}$ (ならばの否定)

論理のド･モルガンの法則

- $\overline{p\vee q}\equiv\overline{p}\wedge\overline{q}$　・$\overline{p\wedge q}\equiv\overline{p}\vee\overline{q}$

（3）推論 $P=f(p,q,\cdots,r), Q=g(p,q,\cdots,r)$ を命題関数、これに対し同値 $(P\Leftrightarrow Q)$

推論・演繹 $(P\Rightarrow Q)$，仮定（前提）と結論，必要条件と十分条件、などを以下定義する。

[Def] [合成命題間の関係] 恒真命題（トートロジー）とは常にＴとなる命題

[Def] 条件文 $P(p,q)\to Q(p,q)$ がトートロジーのとき つまり P が真なら Q も必ず真が成り立つとき，$P\Rightarrow Q$ と書き P は Q を含意する（導く）という（P implies Q.）

推論方式
3 段論法
$\dfrac{P\to Q, Q\to R}{P\to R}$

[Def]◆必要条件と十分条件 [花プリ] Ori. [認識] →IfThen と ⇒Implies

（前提条件）のもとで，「条件文 $P\to Q$ が常に真」（「$P\Rightarrow Q$」のとき，P は Q の十分条件，Q は P の必要条件という．[Def] $P\Rightarrow Q$ かつ $Q\Rightarrow P$ のとき 同値といい $P\Leftrightarrow Q$ とかく

[Th.]「$P\Rightarrow Q$」⇔「真理集合が，$\mathrm{P}\subseteq\mathrm{Q}$」$\boxed{証}$****

[判定の手順] ①前提条件を中央上にかく

[　　　]のとき
$\otimes$
$P \longleftarrow\!\!\longrightarrow Q$
$\otimes$

②P，Q および矢印を双方向にかく

③○×判定を行う（→は，ならば例外なくと読み反例をとことん探す）

困難なときは $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{Q}$ か，集合の包含（ほうがん）関係の図を描き示す

④P のどちらが主語かを確認し，必要・十分の判定をする

P is necessary condition of Q.

Q is sufficient condition of P. [ＳＶＣの構文]「・・は・・の」で捉える

数学は同値性（置き換え）の学問
前提条件 $\forall x\in U$ のもとで $p(x)\to q(x)$ が真とは U において，真理集合が $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{Q}$ と同値尚 $p(x)\to q(x)$ は“p ならば例外なく q である”と読むこと単に条件というときは必要十分条件のことである．

・日本語は判らない「P が成り立つためには，Q が成り立つことが（　　）である」

何が主語か「Q は P の（　　）条件」で捉えよう

・[類]「一郎は二郎の兄」「二郎は一郎の弟」

・[覚え方][いろいろ] 十必,出発十分前,S 極→N極,犬ならば動物である ,{犬} ⊂ {動物}，まる十 内側が十分条件，条件の厳しい方が十分条件

[重要]“ならば”“ならば”で得られるものはすべて元の必要条件である

でべそマークと覚える ⊕

[あのね]「必要でも十分でもない、そんなの関係ない。 （オパピー）」

$\boxed{例}$ x が実数のとき←前提条件

$x>0 \underset{\longleftarrow\bigcirc\!\!-}{\overset{\times}{\longrightarrow}} x=1$

$x>0$ ならば例外なく $x=1$ は×

反例 $x=2$

$\therefore$ $x>0$ は $x=1$ の必要条件であって,十分条件でない

（4）述語、述語論理（命題論理の拡張　$p(a)$ として命題となる）

[Def] **述語** $p(x),q(x),r(x)$：文字 x に値を代入すると命題になる文、命題関数・条件ともいう。

命題を主語と述語に分ける、述語そのものは命題ではない。

◆述語から限定命題を作ることを量化という

限定記号∀（all）と∃（exist）と限定命題

$\forall x: p(x)$「すべての x に対し $p(x)$ である」は命題で全称命題

$\exists x: p(x)$「$p(x)$ である x が存在する」は命題で存在命題という

[注意] ∀ は，all any すべての あらゆる 常に

∃ は，exist ある 存在する 少なくとも１つある

命題	述語
$1=2,\ 1<2$	$x=1$
$\exists x: x>1$	$x>1$
p,q　$\forall x;\ p(x)$	p(x),q(x)

命題の真理値のほかに、命題の内部にある性質や関係などの内部構造を明らかにするのが述語論理である。

[Def] **対象領域** X：対象変数 x の範囲 $\boxed{例}$ $\exists x\in R; x^2+1>2x$，$\forall n\in N; p(n)$←自然数に関する命題

◆「$p(x)\to q(x)$」は述語の合成である述語 だから命題でない しかし真偽を論じている時はこれを次の省略形と見なす

全称命題 $\forall x: p(x)\to q(x)$ [重要] ←すべての x に対し「$p(x)$ ならば例外なく $q(x)$ である」

****「$\forall x\in U: p(x)\Rightarrow q(x)$」$\Leftrightarrow \overline{P}\cup Q=U \Leftrightarrow P\cap\overline{Q}=\phi \Leftrightarrow P\subset Q \Leftrightarrow$「$x\in P\Rightarrow x\in Q$」

$\therefore \forall x\in U: p(x)\Rightarrow q(x) \Leftrightarrow \{x\mid p(x)\}\subset\{x\mid q(x)\}$

論理の基本が $\neg$ (not)，$\wedge$ (and)，$\vee$ (or) と $\to$ (if then)，$\leftrightarrow$ (if and only if)
∀（all），∃（exist）だけとは驚きだ。

◆[th.]限定命題の否定と推論

$\overline{\forall x: p(x)}\equiv\exists x:\overline{p(x)}$，$\overline{\exists x: p(x)}\equiv\forall x:\overline{p(x)}$（ド・モルガンの法則），$\overline{\forall x[p(x)\to q(x)]}\equiv\exists x[p(x)\wedge\overline{q(x)}]$

限定推論（全称命題と単称命題を関係づける4つの法則）

$\forall xp(x)\Rightarrow\forall a\in X: p(a)$，$\forall xp(x)\Leftarrow\forall a\in X: p(a)$，$\exists xp(x)\Rightarrow\exists a\in X: p(a)$，$\exists xp(x)\Leftarrow\exists a\in X: p(a)$

（５）同値の例　数学は同値性の学問　（ア）まとめれば見えてくる

数学は同値性（置き換え）の学問
$p \Leftrightarrow q$
（難）　（易）
同値とは表現は違うが内容は同じということ

① 恒等式　a,b：定数とするとき $\forall x : ax+b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$，　a,b,c：定数のとき $\forall x : ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

② $\forall x,y \in R$　$xy=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ or } y=0$　　$\forall \alpha,\beta \in C$　$\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ or } \beta=0$

A,B：行列のとき「$AB=O \xrightarrow{\times} A=O \vee B=O$（不成立）」，零因子（ゼロいんし）は存在する

③ $\forall x,y \in R$　$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ and } y=0$，　複素数では $\forall \alpha,\beta \in C$　反例　$\alpha=1,\beta=i$　$\alpha^2+\beta^2=0 \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} \alpha=0 \text{ and } \beta=0$

④ $\forall a,a',b,b' \in Q$　$a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$，　$\forall x,x',y,y' \in R$　i：虚数単位　$x+yi=x'+y'i \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$　複素数の相等の定義

⑤ $\dfrac{B}{A}>C \Leftrightarrow BA>CA^2$　（分数不等式）
$\dfrac{B}{A} \geq C \Leftrightarrow \begin{cases} BA \geq CA^2 \\ A \neq 0 \end{cases}$

分数不等式はグラフが原則であるが，同値変形だと分母の２乗（>0）を両辺にかけて
例　$\dfrac{x}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \geq 2(x-1)^2 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$

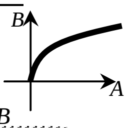
その他，集合・論理，２次方程式の解の分離
３次関数の極値の分離 の各分野においては論理の展開上重要例が豊富 数学的帰納法の原理
②③の応用として「a,b,c の少なくとも１つは１ $\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$」
$a,b,c \in R$ のとき，「a,b,c すべて１ $\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$」

（イ）難解な同値関係は集合で考える
以下 $A,B \in R$ のとき

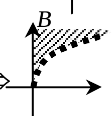
[超重要] p,q の仲を取りもつもの
◇は、グラフ･図でいけ
同値な表現は１通りではない

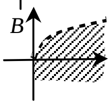
難解な $p \Leftrightarrow q$ は
真理集合 $P=Q$
で納得理解せよ．

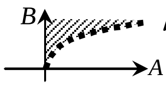
注意 $A=B \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} A^2=B^2$，　$A<B \underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} A^2<B^2$ ←不等式 両辺２乗は危険！

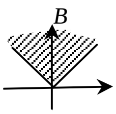
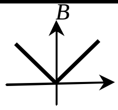
⑥ $B=\sqrt{A} \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases} B^2=A \\ B \geq 0 \end{cases}$

[知ッ得]
ルート $\sqrt{\ }$ や
絶対値 $|\ \ |$
を一気にはずす
同値な表現法

⑦ $B>\sqrt{A} \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases} B^2>A \\ A \geq 0 \\ B>0 \end{cases}$

⑧ $B<\sqrt{A} \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow B^2<A \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ B<0 \end{cases}$

無理方程式･不等式はグラフが原則だが同値変形なら
例　$x+3>\sqrt{x^2-3} \Leftrightarrow B>\sqrt{A}$
$\Leftrightarrow$ 
図をはさんですっきり
$\Leftrightarrow \begin{cases} B^2>A \\ A \geq 0 \\ B>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2>x^2-3 \\ x^2-3 \geq 0 \\ x+3>0 \end{cases}$

⑨ $|A|<B \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow -B<A<B$　　⑩ $|A|=B \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases} B=\pm A \\ B \geq 0 \end{cases}$

（ウ）同値でない重要例　$\Rightarrow$ は「ならば例外なく」とよむ　$|A|=B \Rightarrow A^2=B^2$

⑪ $\alpha>0 \wedge \beta>0 \Rightarrow \alpha+\beta>0 \wedge \alpha\beta>0$　⑫ 整関数；「$x=a$ で極値 $\Rightarrow f'(a)=0$」
⑬微分可能 $\Rightarrow$ 連続 $\Rightarrow$ 積分可能　⑭ $x=1+\sqrt{2}i \Rightarrow x^2-2x+3=0$　⑮ $X=Y \Rightarrow \sin X=\sin Y$
⑯ケーリー･ハミルトンの次数下げ定理　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$
⑰方程式 $f(x)=0, g(x)=0$ の共通解 α $\Rightarrow$ α は $mf(x)+ng(x)=0$　m,n は定数または x の整式
⑱ $a \geq b \geq 0, c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$　　⑲ $x=y \Rightarrow ax=ay$

(エ)*安易な係数比較にご用心*　　　　　　**数学は　同値性の学問**

①多項式の係数比較

◆ $p,q,r,p',q',r'\in R$

すべての x で $px^2+qx+r=p'x^2+q'x+r'$（x の恒等式）　$\Leftrightarrow$　$p=p'\ \wedge\ q=q'\ \wedge\ r=r'$

②分数式の係数比較

□ $p,q,r,s,p',q',r',s'\in R$　$rx+s\neq 0, r'x+s'\neq 0$, なるすべての x で

$$\frac{px+q}{rx+s}=\frac{p'x+q'}{r'x+s'}\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ p=p'\ \wedge\ q=q'\ \wedge\ r=r'\ \wedge\ s=s'$$

◆ $$\frac{px+q}{rx+s}=\frac{p'x+q'}{r'x+s'}\ \Leftrightarrow\ \frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}=\frac{r}{r'}=\frac{s}{s'}$$（係数の比が等しい）

恒等式となるための条件の求め方
必要条件を求め十分性をいうことも
少なくとも・・・の時成り立たねばならないから・・・
逆にこの時・・・

③無理数と係数比較

◆ α を無理数　$p,q,p',q'\in Q$（有理数）　とする

$$p\alpha+q=p'\alpha+q'\ \Leftrightarrow\ p=p'\ \wedge\ q=q'$$

□ α を無理数　$p,q,r,p',q',r'\in Q$（有理数）　とする

$$p\alpha^2+q\alpha+r=p'\alpha^2+q'\alpha+r'$$

$$\overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ p=p'\ \wedge\ q=q'\ \wedge\ r=r'$$

④ベクトルと係数比較　　$s,t,u,s',t',u'\in R$　について

□2つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ s=s'\ \wedge\ t=t'$$

$\boxed{\text{ベクトルが一次独立のとき}}$

◆2つの $\vec{0}$ ではないベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が<u>平行でない</u>とき

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\ \Leftrightarrow\ s=s'\ \wedge\ t=t'$$

◆3つの $\vec{0}$ ではないベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ がそれぞれ
<u>始点を一致させたとき同一平面上にない</u>とき

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow s=s'\ \wedge\ t=t'\ \wedge\ u=u'$$

[1次変換の性質] $\boxed{\text{理系}}$

□ $A\vec{x}=\vec{x}\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ A=E$

□ $A\vec{x}=\vec{x}\ (\vec{x}\neq\vec{0})\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ A=E$

□ $A\vec{x}=\vec{x}\Leftrightarrow(A-E)\vec{x}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow$　？？

□ $A\vec{x}=\vec{x}\wedge A\vec{y}=\vec{y}$

$\Leftrightarrow A(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\vec{y})$

さらに $(\vec{x},\vec{y})^{-1}$ が存在するときは　$\Leftrightarrow$

$A=E$

□ B^{-1} が存在する時は

$AB=B\Leftrightarrow A=E$

[類]

□ $k\vec{x}=\vec{x}\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ k=1$

□ $k\vec{x}=\vec{x}\Leftrightarrow(k-1)\vec{x}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow$　$k=1$ または $\vec{x}=\vec{0}$

⑤ $\boxed{\text{理系}}$ **行列と係数比較**　　$p,q,p',q'\in R$ のとき

□ A：2次の正方行列

$$pA+qE=p'A+q'E\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ p=p'\ \wedge\ q=q'$$

◆ A：2次の正方行列　$A\neq kE$ のときは　$\boxed{\leftarrow\text{重要}}$

$$pA+qE=p'A+q'E\ \Leftrightarrow\ p=p'\ \wedge\ q=q'$$

[ベクトルと行列の類似性の背景]
行列は和差スカラー倍を演算として
ベクトル空間となるので

$\vec{a}\neq k\vec{e}$ のとき

$s\vec{a}+t\vec{e}=s'\vec{a}+t'\vec{e}\Leftrightarrow s=s'\ \wedge\ t=t'$

$A\leftrightarrow\vec{a}$、$E\leftrightarrow\vec{e}$ 単位行列と単位ベクトル

□ A：2次の正方行列　　　***ケイリー・ハミルトンとの係数比較は無条件にはできない***

$$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E\ \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ p=p'\ \wedge\ q=q'$$

(オ) 同値変形によりスッキリ理解できる問題

例1 連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ x^2+y^2-x+y-2=0 & \cdots ② \end{cases}$ を解け。

①-②より $x-y+1=0$ ‥③ , ①かつ③から②が得られるので $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ① \\ ③ \end{cases}$

例2 共通解問題 $\begin{cases} x^2+kx+3=0 & ① \\ x^2+x+3k=0 & ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+kx+3=0 & ① \\ (k-1)(x-3)=0 & ①-②\cdots③ \end{cases}$

①②が共通の実数解をもつ ⇔ ①③が共通の実数解をもつ

③は(i) $k-1\neq 0$ のとき $x=3$ (これが①の解となるとき共通解となる)

①に $x=3$ を代入して $k=4$ ($\neq 1$で適) 共通の実数解 $x=3$

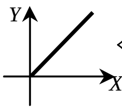
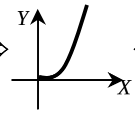
(ii) $k-1=0$ のとき x は任意の値 (このときの①の実数解は共通解となる)

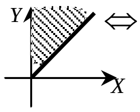
$k=1$ を①に代入 $x^2+x+3=0$ は実数解をもたない。よって①③の共通の実数解はない

(i)(ii)から $k=4$ のとき, 共通の実数解 $x=3$ をもつ

例3 対数方程式・不等式の真数条件の扱い→より単純に

$Y=2\log X \Leftrightarrow \begin{cases} Y=\log X^2 \\ X>0 \end{cases}$, $2\log X=\log X^2$ $(X>0)$, $\log X^2=2\log|X|$

$\log Y=\log X \Leftrightarrow \begin{cases} Y=X \\ X>0 \\ Y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases} Y=X \\ X>0 \end{cases}$, $\log Y=2\log X \Leftrightarrow \begin{cases} Y=X^2 \\ X>0 \\ Y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases} Y=X^2 \\ X>0 \end{cases}$

$\log_2 Y \geq \log_2 X \Leftrightarrow \begin{cases} Y\geq X \\ X>0 \\ Y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow \begin{cases} Y>X \\ X.>0 \end{cases}$

> 対数方程式は, 真数・底の条件が付属した対数をはずした方程式と同値になる。その際, 真数条件は減らせるんだ。

具体例 $\log_3(x-3)=\log_9(kx-6) \Leftrightarrow \log_3(x-3)=\dfrac{\log_3(kx-6)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} kx-6=(x-3)^2 \\ x-3>0 \\ kx-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx-6=(x-3)^2 \\ x-3>0 \end{cases}$

例4 理系 2次の**行列方程式** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、$A^2-3A+2E=O$ を解け

> 2次の行列方程式がC.H.の次数下げ定理によって同値な1次の行列方程式に帰着された
> 特に⇐の確認を
> ①かつ②⇔①かつ③
> ①の元で②と③は同値
> (＊)⇒①より
> (＊)の元で②と③は同値

解 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (＊) のとき $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ①

よって, $A^2-3A+2E=O$ ② ⇔ $(a+d)A-(ad-bc)E=3A-2E$ ③

⇔ $(a+d-3)A-(ad-bc-2)E=O$ ③´

ア) $a+d-3\neq 0$ のとき $A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}E$ より

$A=kE$ の形 $A^2-3A+2E=O$ に代入して

$k^2-3k+2=0$ $k=1,2$ ∴ $A=E,2E$

イ) $a+d-3=0$ のとき $ad-bc-2=0$ より

$\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=0 \end{cases}$ なるすべての $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

> [別解]①②または③
> A : 2次の正方行列で
> $p,q,p',q'\in R$ とする
> i) $A\neq kE$ のとき
> $pA+qE=p'A+q'E$
> $\Leftrightarrow p=p' \wedge q=q'$
> ii) $A=kE$ のとき

> $pA+qE=O$ を満たす A
> ア) $p\neq 0$; $A=-\dfrac{q}{p}E$
> イ) $p=q=0$; A は任意
> $p=0, q\neq 0$; 解なし

ア)イ) あわせて $A=E,2E$, $\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=0 \end{cases}$ なるすべての $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ・・・(答)

7 証明の問題

(1) 直説法 (ア) $A=B$ の証明法

①同値なものを作り ($A'=B'$) それを証明する

②左辺と右辺を別々に計算，または差が0を示す

③Aの定義にBを合わせる

(イ) $A>B$の証明法

①同値なものを作りそれを証明する

②大小比較，差が正を示す

③正の2数の大小比較は，2乗の差が正を示す

または 比が1より大を示す (確率)

(ウ) $p \Leftrightarrow q$の証明法 ($p \Leftrightarrow p', q \Leftrightarrow q'$と同値変形後)

①pを同値変形してqを示す

②ア. $p \Rightarrow q$ と イ. $q \Rightarrow p$ を示す

③真理集合が等しいことを示す $P=Q$

[知ッ得]まず必要条件を求め十分性をチェックする事も多い

(2) 背理法 結論を否定すると矛盾が生じることをいう

否定的命題に有効 $\boxed{例}$無理数 (有理数でない) の証明

「偶数，奇数，素数，互いに素 のレベルに矛盾」

(3) 対偶で証明 $"p \to q" \equiv "\overline{q} \to \overline{p}"$ 元の命題とその対偶とは真偽は一致する ←$\boxed{重要}$

$\boxed{証}$ ($\Rightarrow$ $\overline{q} \wedge p$と仮定すると$p \to q$より$\overline{q} \wedge q$となり矛盾$\therefore \overline{q} \to \overline{p}$) ($\Leftarrow$も同様)

対偶で証明すればいいんだと気づくかどうかだけの問題

(4) 数学的帰納法の原理(帰納的な構造) [いろいろ][花プリ]

前提条件[　　　　　]のとき

① $\begin{cases} (\mathrm{I}) & P(1) \\ (\mathrm{II}) & {}^{\forall}k \in N; [P(k) \Rightarrow P(k+1)] \end{cases} \Rightarrow {}^{\forall}n \in N; P(n)$

前のドミノが倒れたら後のドミノが倒れるとき，最初倒すと，全部倒れる

② $\begin{cases} (\mathrm{I}) & P(1), P(2) \\ (\mathrm{II}) & {}^{\forall}k \in N; [P(k) \wedge P(k+1) \Rightarrow P(k+2)] \end{cases} \Rightarrow {}^{\forall}n \in N; P(n)$

前の2つのドミノが倒れたら後のドミノが倒れるとき，最初の2つを倒すと，全部倒れる

③ $\begin{cases} (\mathrm{I}) & P(1) \\ (\mathrm{II}) & {}^{\forall}k \in N; [P(1) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)] \end{cases} \Rightarrow {}^{\forall}n \in N; P(n)$

前のすべてのドミノが倒れたら後のドミノが倒れるとき，最初の1つを倒すと，全部倒れる

・[一言]「あるステップで成り立つなら(あくまで仮定)，次のステップも成り立つ.」

そして「最初のステップで成り立っている」なら「すべての自然数で成り立つ」が分かる

よって(I)(II)の証明順を逆にする方が納得できる

・[証明の手順①②③][コツ]

①$P(1)$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$を書き出す (何を証明するかを明確にする)

②$P(1)$を証明する ③$P(k+1)$を証明する (前提条件と$P(k)$を使って)

・まずは通常の帰納法で証明を試みようとしてうまくいかないときに別のパターンに移る.

・命題$P(n)$は等式，不等式，"pならばq"その他. スタートは$P(1)$であるとは限らない

・$P(k-1) \Rightarrow P(k)$を証明する方が簡単なことも知っておく.

[あのね] 「キノウの反対は？」「・・」 「あした」 (帰納(きのう)↔演繹(えんえき))

論理分野における同値関係

「$p \Rightarrow q$」 $\Leftrightarrow$ 「$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$」

「$p \Leftrightarrow q$」 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$

命題の同値

$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$ $"p \to q" \equiv "\overline{q} \to \overline{p}"$

$\overline{{}^{\forall}x : p(x)} \equiv {}^{\exists}x : \overline{p(x)}$

$\overline{{}^{\exists}x : p(x)} \equiv {}^{\forall}x : \overline{p(x)}$

背理法は重要な証明法である
否定的命題に有効 (2重否定は肯定で扱いやすくこれに矛盾があることを示す)

[話題] (1994年2月13日) 360年間の難題の解決が宣言された。フェルマーの最終定理が証明されたのである。

背理法 $x^n + y^n = z^n$ $(n \geqq 3)$ なる $x, y, z \in N$ があると仮定するとモジュラーでない楕円曲線ができる、これはすべての楕円曲線はモジュラーであることに矛盾する ワイルズ(英プリンストン大)以降,フェルマー・ワイルズの定理といわれる

前提条件のもとで $p \Rightarrow q$ の証明は
(方法1) 前提条件とpからqを導く
(方法2) qを前提条件とpを用いて証明する

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$の証明とは
(方法1) 前提条件と$P(k)$から，$P(k+1)$を導く (一般的に難しい。帰納法が判らないという人)
(方法2) $P(k+1)$の証明を，前提条件と$P(k)$を使って行う (簡単よって推奨)
[要注意] 仮定の $p(k)$ は $\forall k : p(k)$ ではない
これは証明すべき式である

[注意] 数学的帰納法による証明は、十分条件での証明であり,そのように論述せよ.
$\forall n \in N; P(n)$
の証明は，数学的帰納法でできることがある。必ずできるわけではない。

⑸ 数学的帰納法により証明が可能な様々な命題 P(n) 例←自然数が主役ならドミノ倒しの要領で証明

①等式 $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-(n^2-4n+2)$ *のとき ←これは前提条件* （隣接2項間漸化式）

$\forall n\in N;\ a_n=2^{n-1}+(n-1)^2$ ・・・・(*)

証 *(I)* $a_1=2^{1-1}+(1-1)^2$ */証明* $a_1=1$, *で成立している/*

(II) $\forall k\in N:[a_k=2^{k-1}+(k-1)^2\Rightarrow a_{k+1}=2^{k+1-1}+(k+1-1)^2]$

証明/ 左辺= $a_{k+1}=2a_k-(k^2-4k+2)=2\{2^{k-1}+(k-1)^2\}-(k^2-4k+2)$

$=2^k+k^2=2^{k+1-1}+(k+1-1)^2$ *=右辺 ゆえに 左辺=右辺 /*

(I)(II)より数学的帰納法により(*)は成り立つ 証明終

前提条件と k 番目の仮定を用いて，この等式を証明する．**漸化式の型に応じ帰納法のスタイルが変わる**例

$a_1=26, a_2=39$

$a_{n+2}=2a_n+2n+1$

の時，$a_n>(n+4)^2$

の帰納法による証明

②不等式 $x>0$ *のとき ←これは前提条件* 二項定理で証明できる問題

ベルヌーイの不等式 $\forall n\in N:(1+x)^n\ge 1+nx$ ・・・・(*)

前提条件と k 番目の仮定を用いて，この不等式を証明する

証 *(I)* $(1+x)^1\ge 1+1x$ *証明／ 等号で成立/*

(II) $\forall k\in N:[(1+x)^k\ge 1+kx\Rightarrow (1+x)^{k+1}\ge 1+(k+1)x]$

証明/ 左辺−右辺= $(1+x)^{k+1}-\{1+(k+1)x\}$

$=(1+x)(1+x)^k-\{1+(k+1)x\}$

$1+x>0$ より $\ge(1+x)(1+kx)-\{1+(1+k)x\}=kx^2\ge 0$

ゆえに 左辺≧右辺 /

(I)(II)より数学的帰納法により(*)は成り立つ 証明終

[ほんとはネ] ドミノは積み終わってから，さあ最初を倒すよ！
*（II）から（I）*の順が自然です．
II「前が成り立つと仮定すると
後が成り立つ」を証明して
I「最初が成り立つ」をいえば
順次仮定が満たされ最初以降のすべてで成り立つことになる

②' 不等式 $\forall n\in N:1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ 入試では数学的帰納法でないと証明がとても困難な問題が出題される。

③一般命題 $x+y,\ xy$ がともに整数のとき， *←これは前提条件*

$\forall n\in N;\ x^n+y^n$ は整数である ・・・・(*)

前提条件と k 番目と $k+1$ 番目の仮定を用いて，この命題を証明する

証 *(I)* x^1+y^1 は整数 *証明／ 条件から明らか/*

x^2+y^2 は整数 *証明／* $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$: 整数/

(II) $\forall k\in N;[x^k+y^k$ が整数 and $x^{k+1}+y^{k+1}$ が整数 $\Rightarrow x^{k+2}+y^{k+2}$ は整数]

証明/ $x^{k+2}+y^{k+2}=(x^{k+1}+y^{k+1})(x+y)-xy(x^k+y^k)$ は前提条件と仮定から整数である/

(I)(II)より数学的帰納法により(*)は成り立つ 証明終

④ 命題 $\forall n\in N$;“ $p(n)\Rightarrow q(n)$ ” の形のものが一番難しいものである

証 *(I)* $p(1)\Rightarrow q(1)$ を証明する／ ／

(II) $\forall k\in N;[\,p(k)\Rightarrow q(k)$ ならば $p(k+1)\Rightarrow q(k+1)\,]$を証明する

／つまり $p(k), q(k)$ と $p(k+1)$ を用いて $q(k+1)$ を証明する／

[課題] 「n次の阿弥陀くじ(任意の置換になるもの)は存在する」,「コインがm(≧4)枚ある。交互に1枚または2枚とっていき最後に取った者を負けとするゲームをする。このゲームの必勝法は、3n+1枚残すように取ればよい」 を証明せよ。

[あのね]① **『みんなハゲである』** (証)(I):毛が1本の人はハゲである/明らか/(II)毛がk本の人がハゲと仮定すると,毛がk+1本の人もハゲである/1 本ぐらい増えても・・/② **『ご飯はいくらでも食べられる』** (証)(I)1粒食べられる//(II)k粒食べれたと仮定すると k+1 粒食べられる/いくらお腹がいっぱいでも・・/③ **『碁石はすべて同色である』** (証)(I)1個の碁石は同色である /明らか/(II)k個の碁石が同色であると仮定するとk+1の碁石も同色である/k+1の碁石を a なる1個と残りk個の碁石に分けると 仮定よりk個は同色である 次に別のbなる1個と残りk個の碁石に分けると 仮定よりk個は同色である.このことから, k+1個の碁石は同色である/I IIより数学的帰納法により、碁石はすべて同色であることが証明された.

註①ハゲは毛の本数ではない, ②時間の制限は, ③帰納法による証明にゴマカシは厳禁.特にIIの証明は厳密に.

8 数と式

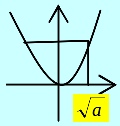
(1) [Def.] 根号の定義 $a>0$ $\sqrt{a}\overset{def}{=}$ ①2乗すれば a になる②正の数

[計算] $\sqrt{\ }$ を含む計算[いろいろ] ①分母を有理化する (計算が楽だから)

この変な形は根(radix)の r から

②2乗の根号をはずす $a\in R$ のとき, $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

$\sqrt{k}=\begin{cases} \text{実数}(k\geq 0) \\ \sqrt{-k}i \quad \text{虚数}(k<0) \end{cases}$



③2重根号がはずせる事もある $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=|\sqrt{a}+\sqrt{b}|=\sqrt{a}+\sqrt{b}\ (a>0,b>0)$

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=\sqrt{a}-\sqrt{b} \quad (a>b>0)$

$\sqrt{2}$ は無理数を証明せよ

$\sqrt{1+\sqrt{2}}$ の2重根号ははずせない

(2) 整式の乗除

$P(x)$ を多項式 (Polinomial) とする

基本は $A=BQ+R$ [超重要][☆☆☆]

整式の割り算はセンター必出

[Th.] 因数定理 $P(\alpha)=0 \Leftrightarrow P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ

剰余定理 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$ である

前提として $ab=ba$.
行列は $AB\neq BA$ より使えないが
$AE=EA$ より A,E で使える.

(3) 因数分解といえば最低次の文字で整理する

1次式→共通因数が必ずある, 2次式→たすきがけ・解の公式

3次式→ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

因数定理利用

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

高次式→因数定理利用, 置き換えで1,2,3次に帰着, 対称式・交代式利用

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ ←重要 (二項方程式)、相反方程式

G.C.M.と L.C.M.
のコツ→図式化

A	=	O		∇
B	=	O	Δ	
G	=	O		
L	=	O	Δ	∇

(4) 不定方程式の整数解問題

$x,y\in I$

① $xy-2x+3y=0$ →因数分解 $(x+3)(y-2)=-6$

滑らか関数の平均値の定理は因数取り出し定理
$f(b)-(a)=(b-a)f'(c)$

② $2x+3y=5$ →1解 (1, 1) を求め $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$ から $(x,y)=(1+3k,1-2k), k\in I$

③ $x^2+xy+2y^2-29=0$ x の2次方程式とみて判別式 $D\geq 0$ から y を絞り込む

(5) [Th.] 二項定理 (展開だけでなく因数分解としても)

[いろいろ] $n\in N$

頻出暗記
双方向共
期待値の
計算で右
辺から左
辺方向に
利用する

① $(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n \quad (r=0,1,2,\cdots,n)$

② $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$ ←これは x の恒等式

恒等式の両辺を微分･積分して新しい恒等式を得る。
それに $x=1,-1$ などを代入, 二項係数のいろいろな関係が得られる また
$(1+x)^n(1+x)^n$
$=(1+x)^{2n}$
の展開の x^n 係数比較から
${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

$x=1$: $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$, $x=-1$: $0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n$

③ $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots+x^n$

④ $h>0$ のとき, $(1+h)^n={}_nC_0+{}_nC_1h+{}_nC_2h^2+\cdots\cdots+{}_nC_nh^n\geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ **[2項不等式]**

n に着目, 指数関数 (難) →整関数 (易), n の指数 (難) $>$ n の2次式 (易), はさみうち論法で利用

⑤ $n=5$, 6, 7程度はパスカルの三角形を利用するとタスカル

パスカルの三角形

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

[比較して区別] $n\in N$, $x\in R$ として

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=1+n+\dfrac{1}{2!}n(n-1)+\dfrac{1}{3!}n(n-1)(n-2)+\cdots$

と $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots$ (マクローリン展開)

⑥ 多項定理 $(a+b+c)^n=(a+b+c)(a+b+c)\cdot\cdot\cdot\cdot(a+b+c)$

$=a^n+\cdots\cdot+\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r+\cdots+c^n \quad (p+q+r=n)$ ←だらだら書こう

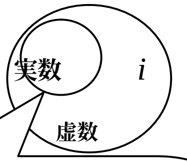
[コツ]二項・多項展開の係数問題は意味から考えたらとても楽だ

${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot a^pb^qc^r$ ← n 箇所から a を p 個, b を q 個…選ぶ場合の数だけできるから

9 絶対不等式

「重要」相加・相乗で等号成立は必ず言わねばいけません
５０ｃｍ≦身長≦２５０ｃｍは正しいが実際に等号成立はない,このチェックが最大最小問題では必要となります

条件不等式は解く



虚数には正負,大小関係が定義されていないので,不等式を扱うときは通常,文字は実数としておく

(1) $A>B$の証明法① 大小比較 差が正を示す[大原則∵ $A>B \Leftrightarrow A-B>0$]

② 正の２数（$\sqrt{\ }$ | |）の大小比較は　２乗の差が正を示す,比$\dfrac{A}{B}>1$を示す

(2)相加平均と相乗平均（調和平均）の関係[☆☆☆] **[複雑化]**

$a>0, b>0$のとき,　$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　$\left(\geq \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$（等号$\Leftrightarrow a=b$）

①　$a+b \geq 2\sqrt{ab}$　の形で利用することが多い

$\boxed{例}$　$x>0$のとき,$x+\dfrac{1}{x} \geq 2$　（等号$\Leftrightarrow x=1$）

$2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x 2^{-x}}=2$（等号$\Leftrightarrow x=0$）

[テストに出る]分数関数で最小値と言えば・まず①の形で相加・相乗平均の応用と思え・ｋとしてｘの実数条件から・微分してグラフを

$a \geq b \geq 0, c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$
←は×反例（a=100,b=1,c=1,d=2）
$\boxed{例}$ $a>0, b>0$のとき

$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{4}{ab}}$

$\therefore\ (a+b)\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}\,2\sqrt{\dfrac{4}{ab}}=8$

から最小値8はいえない

[左辺$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+5 \geq 2\sqrt{4}+5=9$

等号$\Leftrightarrow a=2, b=1$　]

② $a>0, b>0, c>0$のとき,　$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

証明②　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

③　$a_i>0$のとき,　$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

証明③ $a_1=x$として$x>0; F(x)>0$の証明へ。微分する

[重要]見かけは2項でも3項にして適用する問題　$a>0$

$a^2+\dfrac{2}{a}=a^2+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a}}=3$

(3)コーシー・シュワルツの不等式[いろいろ]

① $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$　（等号$\Leftrightarrow \cos\theta=\pm1 \Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}, k\neq0$）

② $a,b,x,y \in R$; $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$（等号$\Leftrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$）

比例式の扱い
ⅰ)比例式は$=k$とおく
ⅱ)加比の理の利用

③$\forall i \in N; a_i, b_i \in R$; $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2\right)$（等号$\Leftrightarrow (a_1,a_2,\cdots,a_n)=k(b_1,b_2,\cdots,b_n), k\neq0$）

①の成分表示が②③

④ $\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$　ただし,　$a<b$←この条件は重要

[証明は独特]常に$f\neq0, g\neq0$のとき　$\forall t; (tf+g)^2 \geq 0$

[関連]①積分不等式②ハサミウチの原理に使われる不等式

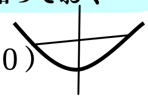
$\forall t; \int_a^b (tf+g)^2 \geq 0 \therefore \forall t; t^2\int_a^b f^2+2t\int_a^b fg+\int_a^b g^2 \geq 0$ よって$\dfrac{D}{4}=\left\{\int_a^b fg\right\}^2-\int_a^b f^2\int_a^b g^2 \leq 0$ より

(4) ① $f(x)$が下に凸（とつ）の関数のとき,$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)<\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$　$\boxed{例}$$2^{\frac{x+y}{2}}<\dfrac{2^x+2^y}{2}$

$(f''(x)>0)$

凸関数の性質の問題として知っておく

曲線の凹凸を利用した不等式の証明は重要な裏技



② 三角不等式　$||a|-|b|| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|$（等号$\Leftrightarrow$左$ab\leq0$　右$ab\geq0$）

③ ベルヌーイの不等式　$\alpha>0$のとき,$(1+\alpha)^n>1+n\alpha$　$(n>1)$

実数の２乗≧０

(５)よく出る変形 $a,b,c \in R$;のとき$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geqq 0$

これ以上の変形は無意味虚数の２乗は正負不明

[参考]$\alpha,\beta,\gamma \in C$として,複素数平面上で$\alpha,\beta,\gamma$で正三角形$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

(6)規則性の適用

①は絶対値が１より小さい２数の和は１たす積より小さいという規則　②はこれを利用

$\boxed{例}$$|a|<1, |b|<1, |c|<1$のとき　①$a+b<1+ab$　②$a+b+c<2+abc$

さらに「$|a_i|<1$のとき,$a_1+a_2+\cdots+a_n<n-1+a_1a_2\cdots a_n$」は数学的帰納法で証明

１０ 整数（自然数）の問題　・・, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ・・

（１）数学的帰納法　自然数に関する命題の証明は数学的帰納法が使える　Ori.

[コツ]（Ⅰ）$P(1)$：具体的に書き出す　　*証明／この証明は簡単／*

（Ⅱ）“ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ”：具体的に書き出す

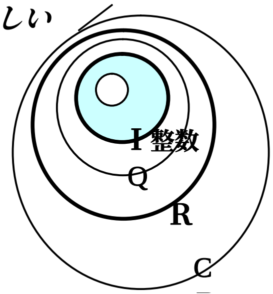
証明／　ここを如何に厳密に行うかを試されていると思え

（方法１）$P(k)$ から $P(k+1)$ を導く　←　一般に難しい

（方法２）$P(k+1)$ の証明を $P(k)$ を用いておこなう←一般に易しい

（Ⅰ），（Ⅱ）より $^{\forall} n \in N; P(n)$

整数であることはゆるい条件でなく、逆にかなり強い条件である

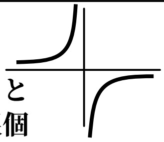


（２）不定方程式の整数解問題

① $xy - 2x + 3y = 0$，　$x, y \in I$

因数分解して　$(x+3)(y-2) = -6$

積＝整数　の形
分数関数のグラフ
漸近線に近づくこと
から格子点は有限個



$(x+3, y-2) = (1,-6), (-6,1), (-1,6), (6,-1), (-2,3), (3,-2), (2,-3), (-3,2)$

$(x, y) = (-2,-4), (-9,3), (-4,8), (3,1), (-5,5), (0,0), (-1,-1), (-6,4)$

② **２次方程式**　$x^2 + (a+6)x + a - 2 = 0$ **の２解** α, β **とも整数となる** a **の値**

[コツ]判別式と解と係数の関係から考える，判別式から絞り込めるものとでないもの

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a - 6 \\ \alpha\beta = a - 2 \end{cases}$$ より　$\alpha\beta + \alpha + \beta = -8$　$(\alpha+1)(\beta+1) = -7$

$(\alpha+1, \beta+1) = (1,-7), (-1,7), (7,-1), (-7,1)$　$(\alpha, \beta) = (0,-8), (-2,6), (6,-2), (-8,0)$　$\therefore a = 2, -10$

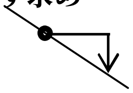
整数解問題は
文字の数>式の数
いろんな方法で
絞り込んでいく

③ **１次の不定方程式**　$2x + 3y = 5$　$x, y \in I$

１つの解として $(x, y) = (1,1)$ **がある．**

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ から $(x, y) = (1+3k, 1-2k), k \in I$

１解（特殊解）をまず求め
,傾きから他の解
（一般解）を求める



④ **分数形**　$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$　$(x \geq y \geq z)$ **を満たす自然数**

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$　より，まず $z = 1, 2, 3$ これより・・

[Th.]初等整数論の基本定理
「整数 a, b が互いに素のとき，
$ax + by = 1$ は整数解をもつ」
$a, b \in N$ のとき，a cm と b cm のリボン使って測れる長さは a，b の最大公約数 d の倍数cmのみである

⑤ ア $x + y + z = 5$，　$x, y, z \geqq 0$ 整数解の個数←重複組合せ

イ $x + y + z = 5$，　$x, y, z > 0$ 自然数解の個数　$\rightarrow X = x - 1 \cdots \; X + Y + Z = 2, X \geq 0 \cdots$

⑥２次の不定方程式や不定不等式の整数解問題　少なくとも実解である条件 $D \geq 0$ を使って絞り込む

⑦ $x, y, z \in N$ ；ピタゴラス数 $x^2 + y^2 = z^2$，フェルマーの大定理に関連した[$x^n + y^n = z^n$]話題

（３）格子点（こうしてん）の問題

① **２次元の平面図形**　$x = k$ $(p \leq k \leq q)$ を固定して，

格子点の数 $N(k)$ を求め $\sum_{k=p}^{q} N(k)$ を計算する．　y 固定も

n 進法の問題は１０進法の５７２の意味が判れば何とかなる

$572_{(10)} = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

$101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

② **３次元の空間図形**　$z = j$ $(r \leq j \leq s)$ を固定して，格子点の数 $M(k)$ を求める

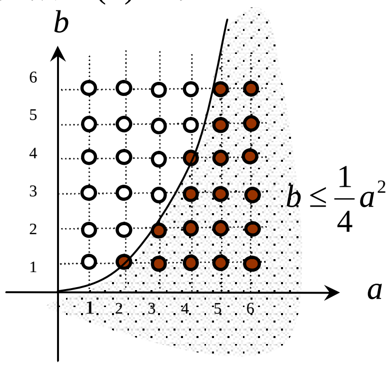
$M(k)$ は２次元の場合と同様に求める　$\sum_{j=r}^{s} \sum_{k=p}^{q} N(k)$

（４）サイコロ２個の確率と格子点の融合問題

a, b をサイコロＡ，Ｂを振ったときの目とする

$x^2 + ax + b = 0$　が実数解をもつ確率

$D = a^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}a^2$　● が１９個　$\therefore$　$p = \frac{19}{36}$



１１　京大の論証問題

〔０５　　〕 $\tan 1°$ は有理数か．[背理法と tan の加法定理で]

〔０４文系〕 n,a,b は 0 以上の整数とする． a,b を未知数とする．方程式　（＊） $a^2+b^2=2^n$ を考える．

（１） $n \geq 2$ として， a,b はともに偶数である．（証明）

（２）0 以上の整数 n に対して， a,b の組をすべて求めよ．

〔０３文系〕 p は３以上の素数， x,y は $0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$ を満たす整数のとき，「 x^2 を $2p$ で割った余り＝ y^2 を $2p$ で割った余り」 $\Rightarrow x=y$ （証明）

〔０２文系〕４個の整数 $1,a,b,c$ は $1<a<b<c$ を満たしている．これらの中から相異なる２個を取り出して和を作ると， $1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという． a,b,c の値を求めよ．

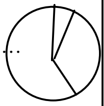
〔０１文系〕任意の自然数 n にたいして，
n^9-n^3 は９で割り切れることを示せ．

剰余類のアイデアは無限にある整数を有限のものに分類する
曜日は mod7　。問題に応じて　mod3　mod5　と使い分ける

〔０１理系〕方程式 $x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2yz-5=0$ をみたす自然数の組 (x,y,z) をすべて求めよ．

整数論・・素数が無限に存在することを証明するなど数の構造を追求
「数学は科学の女王で，
　　整数論は数学の女王」

自然数 $\left\{\begin{array}{ll} \text{約数１つ} & 1 \\ \text{約数２つ} & \text{素数 } 2,3,5,7,11,13,\cdots \\ \text{約数３つ以上} & \text{合成数} \end{array}\right.$


N

互いに素，素数，偶数，奇数
無理数がポイント，
否定的命題の証明は背理法が有効

[Th.]初等整数論の基本定理
「正の整数 n は素数の積に一意的に分解できる」 ←*1を素数に入れないわけ*
・素因数分解の一意性は重要
・ a,b が互いに素⇔ a,b の素因数に共通なものがない．整数論のキーワードは互いに素・整数条件は意外に強力
「整数 a,b が互いに素のとき，
　　$ax+by=1$ は整数解をもつ」
フェルマーの小定理「 $n^p \equiv n \pmod{p}$ 」

〔００理系〕 p を素数， a,b を**互いに素**な正の整数のとき， $(a+bi)^p$ は実数ではない．（証明）

〔００文系〕（１）格子点を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{1}{2}$ 以上である．（証明）
[Hint] $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ に気付けばよい

（２）格子点を頂点とする凸四角形の面積が１ $\Rightarrow$ 四角形は平行四辺形（証明）

中国伝来語である「有理数」は適当な訳ではなく，正しくは“比数”がよい。『万物は数（自然数）である』(ピタゴラス)

〔９９理系〕 $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ は無理数であることは使ってよい．

（１）有理数 $p,q,r \in Q$ のとき， $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0 \Rightarrow p=q=r=0$．（証明）

（２） $a,b \in R$ ； $f(x)=x^2+ax+b$ について， $f(1), f(1+\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数．（証明）

〔９９文系〕 x は 0 以上の整数, $C(x)$ は x の下２桁を表すとする. 例えば, $C(12578)=78, C(6)=6$。
n を２でも５でも割り切れない正の整数とする．

[あのね]互いに素と１３年蝉、素数と餃子

（１） x,y は 0 以上の整数として， $C(nx)=C(ny) \Rightarrow C(x)=C(y)$ （証明）

（２） $C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在する．（証明）

[あのね]素数体験！　**7は素数だ！**
（体験談）餃子1人前（7個）は、2人でも3人でも・・分けられなかった

〔９７理系〕 n が相異なる**素数** p,q の積 $n=pq$ のとき，
$(n-1)$ 個の数 ${}_nC_k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ の最大公約数は１である

[質問]整数論をやっておく方が良いでしょうか［答え］整数論を必要とする問題は出ません。

［**コツ**］**[無理数であることの証明]**　[Def]無理数＝有理数でない数　[実数（数直線上にある数）で有理数（比数）でない数]と有理数から定義されている。よって無理数であることの証明は,有理数でないことを証明する。（つまり背理法で）有理数と仮定すると矛盾が生じることをいう。

$\boxed{\text{姿勢}}$　完解は目指さないが白紙はいけない．（１）（２）となっていたら（１）は易しいに決まっている．（２）は（１）をヒントに解く．**アプローチ度をみてもらう**という姿勢で，発見したことを，書いていく．それで合格圏に入れる．特別な準備は要らない．**試験場その場での思考力**が試されていると思えばよい．解答をみて理解できても意味がない．何時間もかけて清書された模範解答の理解はかえって難しい．自分で考えること，思いつかなければ仕方がない，あっさりパスすることが合格につながる．難しければ難しいほど良いと思え，それだけ競争相手は諦める．自分は，できる部分まででがっちり稼ぐ．出題者は，諦める人が多く出るのを期待している．あとで悔しい思いをさせるのが良い問題．２０分制限のパズルと思え．