大学受験 受験数学テーマ集 ver２.０

ⅠAⅡBⅢC

新課程・旧課程　理系・文系　基礎・標準・応用　センター・２次　受験生・指導者

定義・定理・公式の意味と重要テーマ

Q.「定理」って何ですか
某大学の口頭試問

[定義][Def.]
[定理][Th.]
[公式]
[覚え方]
[といえば]
[知ッ得]
[裏技]
[難→易]
[秘伝]
[証明]
[花プリ]
[Ori.]
[なるほど]
[注意]
[☆☆☆]
[パターン分類]
[理論]
[コツ][大学][美しい]
[いろいろ]
[あのね]
[複雑化]

テスト
に出る

出

ブルバキ学派（フランスの数学者集団）
数学は集合・定義・公理から構築される
Ori.

定義とは, 概念や言葉などの意味を正確に限定し述べたもの（例　三角関数の定義）

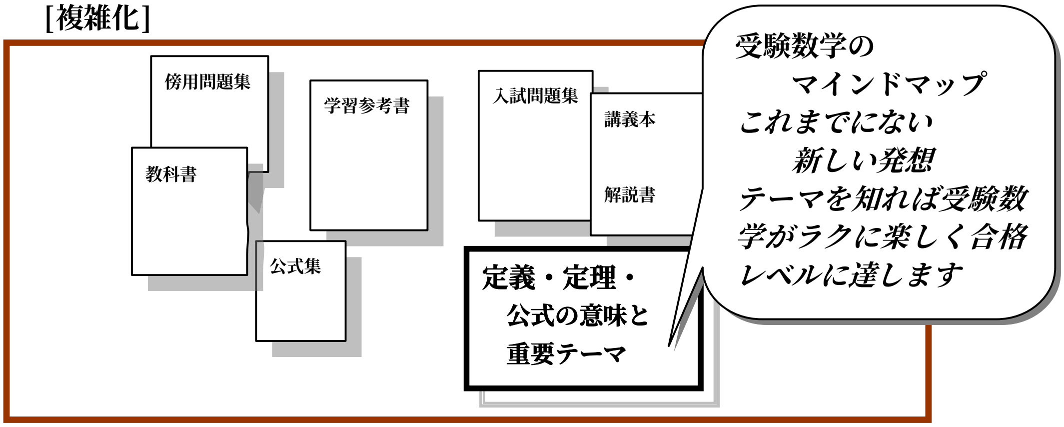
公理とは, 他の命題を用いて証明することはできないが明らかに真理であると認められるので，論理的体系を組み立てるときの基礎におかれる事柄

↓

公式とは, 計算の方法や法則を数学上の記号で書き表した式（例　２倍角の公式）

定理とは, 数学的論証によって正しいことが証明された命題のうち重要なもの
（例　加法定理）

基本定理　中でも代数学の基本定理・極限の基本定理・微積分学の基本定理・初等整数論の基本定理は横綱級



本書の特徴

公式も知っている，問題も解ける，でも何か足らないと感じることはありませんか．なぜ，そんな公式・定理があるのか，なぜそれを使えばよいのか．定義・定理・公式の意味と使い方，重要テーマの確認が本書で行えます．その結果，本質に迫る学習を助け，早く重要テーマに入ることができます．

利用法

1　日々の授業の中で，習っている範囲の概略を認識する．

――教科書・傍用問題集とともに『受験数学テーマ集』を利用する――

質問することが判らない．何をやっているのか判らない．そんな学習はしていませんか．まず全体像を知ってから学習に入りましょう．各分野の全体が見開き２ページに収まるように構成しており，全体像が一望でき，その中で今何をやっているか，重要項目が何かが判るでしょう．

2　入試問題の演習時に何の問題であるかを本書で確認する．

――入試問題集・受験参考書とともに『受験数学テーマ集』を利用する――

入試問題集で演習するとき，あなたは解きっぱなしにしていませんか．

その問題がどの公式を用い，何をテーマとしているのか，オリジナルな図表や考え方で，確認・整理してください．受験準備として何をどこまで知っておくべきかが判り，合格レベルに早く達することができます．

①基本をマスターすれば問題が解ける？
逆です．「問題は基本事項の寄せ集め」応用問題から基本へ戻るのです．
②数学は計算？
「数学は図学」．とにかく図で考えよ．図は正確に　イラスト的にを使い分けることです．
それを支えるのが計算です．計算ミスは次に繋がりません．
③数学の授業は“間”と“かけ合い”が大切
④数学は閃き（ひらめき）の学問　ヒラメキの場所は　寝床・トイレ・散歩中
⑤答案は数式だけでなく説明を入れないといけません
等号の意味にも　定義　方程式　恒等式　おきかえ　式の変形などいろいろあります
⑥補習や小テストなどより真の実力を付ける方法はノート添削である

目　次　*[イタリックは理系の内容]*

写像・関数の定義
行列の積・逆行列の定義
孤度法と三角関数の定義
1次変換の定義
$\sqrt[n]{a}$ と i の定義
指数・対数の定義
π と e の定義
導関数・微分の定義
級数・連続・微分可能性・積分の定義
位置・速度・加速度の定義
確率の定義
平均・分散・標準偏差、相関係数の定義

1　はじめに

（１）受験数学とは

書店に行くと，良い参考書が山ほどある.でも過去の入試問題の解説という意味でどれも同じです.あっさり解いているか，ねちっこく解いているかだけ.よく模範解答を読んでも判らないという人がいますが，それで理解すること自体がむちゃです.数十分かけて試行錯誤して，簡潔にまとめ，それをさらに清書したもので理解できる筈ないでしょう.自分でいろいろ試行錯誤しながら考える方がよっぽど判かり易いものです.

受験参考書を読んで，最低４・５回繰り返し，知るべき事は知っておくこと.実践演習に，答えは不要です.問題だけ，しかもできるだけ難しいものを考えてみなさい.ずっと考える，ひたすら考える.計算まちがいしていないかな？　この不安な気持ちを持ち続け決して答えは見ない.解けたら答え合わせもしない.未知のものに対するアプローチ・研究とはそんなもの.問題を切り取った紙片を１枚，ポケットに入れておくのが私は好きだ.

（２）本書の利用法

入試問題を解くときに，
①一通りその分野の基本公式とテーマを知る.
②問題を解いた後に，問題のテーマ・使われた公式を
　本書で確認し，何の問題であったかを考える.
③受験数学の重要テーマとしての位置づけを確認し，マークを入れておく.

問題は解きっぱなしにしないこと
①テーマ・出題者の意図は？
②別解は？
③一般化は？

（３）実践演習の方法

①同じ問題は出ない　②時間はない　③誰も解けない問題を出す
よって，各問題は単品ではなくセットメニューの中で考える必要がある.

制限時間は・受験生のレベルは・問題の組合せは
（誘導の（１）は易しい印，計算問題，受験数学のパターン問題，その場で考える問題，解けない問題，解いてはいけない問題）

学習指導要領の範囲は？
誘導にしたなら，小論文なら，何でも出せる「習っていない」は通用しない世界

（４）採点基準（河合塾）

各設問とも論述・証明の部分においては段階的に評価して加点・減点している.また，論述・説明が不十分なままの答えに対しては原則として得点を与えない.指示された部分の解答・論述が　①完全であるのに比してわずかの不備がある. ②不備がある程度目立つ. ③中途ぐらいまでアプローチがしてある. ④わずかのアプローチしかできない. の各場合に対して，その部分の配点のほぼ４／５，３／５，２／５，１／５（整数点）を対応させる.

（５）試験会場での実際の解き方

すべての問題を見る.解けそうな問題は１問もなくて当たり前.もし１問でも当たっておれば合格と思え.難問ばかりであれば喜ぼう.それだけで諦める人がいっぱいいるから.

序盤：問題は易しい順に並んではいない.すべての問題の中で（部分までも含めて）解ける部分を探し解いていく.誘導の（１）は易しい印と考えよ.

中盤：資料作りを行う.各問最低５～１０分試行錯誤と資料作りを行う.アプローチ度を見てもらう.完答できるものを見つける.

終盤：完解できそうな問題は計算ミスに注意する.１点でも多く採点してもらえるように発見したことはすべて答案に書いておく.

○受験後の感想：時間が足らない.直前に勉強したその大学の過去問は出ない.見たことある問題・すぐに方針が浮かぶ問題なんて１問も出ない.変な問題を考えるような練習が一番実践的であると気づいた.計算ミスをしたら次のステップに繋がらない.

○合格後の感想：２次は解ける問題を解く能力でなく，解けない難しい問題にアプローチする能力が必要. 入試問題は解けなくても合格できるんだ.

2 受験数学の構成

（1）教科書の構成と通常の出題範囲

＜旧課程＞　数Ⅰ　２次関数，*三角形，確率*

数A　*式と証明*，数列，平面図形，計算機　から２分野

数Ⅱ　図形と方程式，三角関数，指数対数関数，微分積分

数B　**ベクトル，複素数平面，確率分布，計算機　から２分野**

数Ⅲ　数列の極限，級数，関数の極限，関数のグラフ，微積分

数C　行列，２次曲線，極方程式

複素数平面

＜新課程＞

数Ⅰ　方程式と不等式，２次関数，図形と計量

数A　場合の数と確率，論理と集合，平面図形

数Ⅱ　式と証明，複素数と方程式，図形と方程式，三角関数，指数・対数関数，微分積分

数B　数列，ベクトル，統計〔資料〕，数値計算とコンピュータ

数Ⅲ　極限，級数，微分法，積分法

数C　行列と一次変換，２次曲線・極方程式，確率分布，検定推定

平面図形
微分方程式
１次変換

（2）センターの構成[花プリ][旧課程]

① $\boxed{\text{Ⅰ}}$と$\boxed{\text{Ⅰ・A}}$，$\boxed{\text{Ⅱ}}$と$\boxed{\text{Ⅱ・B}}$　はそれぞれ同一冊子

② $\boxed{\text{Ⅰ}}$，$\boxed{\text{Ⅱ}}$　の選択は要注意　かえって難しいかも

③　出題形式は定着[新課程]

$\boxed{\text{Ⅰ・A}}$Ⅰ．１次２次方程式･不等式・関数(40)　Ⅱ．三角形・確率(40)　Ⅲ．論証・平面図形(20)

$\boxed{\text{Ⅱ・B}}$Ⅰ．指数・対数・三角関数(30)　Ⅱ．図形と方程式・微積(30)　Ⅲ．ベクトル(20)　Ⅳ．数列(20)

④　１００点をめざす.時間は足らない.

[あのね]センターテストには“おやつ”を持っていこう.待ち時間がかなり長い「先輩より」おやつは「Kitkat」・「カール」「キシリトールガム」・「ハイレモン」きっと勝つ･受か～る･きっちりとーる･入れるもん･重い「カツ丼」より「カツねうどん」

（3）２次の構成

Ori.

① １問５０点３０分×５問＝２５０点１５０分が標準（←理系）

② ２完＋部分点をめざす得点率４０%以上を確保する.６０%で完璧

③ <u>実際の解答形式で実践演習を行うことが大切.[花プリ]</u>

[新課程]センター数学は差がつかない（得意な人が損をすることも）ⅡBで数列かベクトルの代わりに資料の整理を選択することも考えておくことを勧める.

④ 標準６題　１．行列と１次変換　２．級数微積の融合（数列）
３．微積分の応用（2次曲線）４．ベクトル　５．確率・漸化式　６．証明問題　（数学的帰納法）

⑤ $\boxed{1}$（１）は易しい印

（２）標準

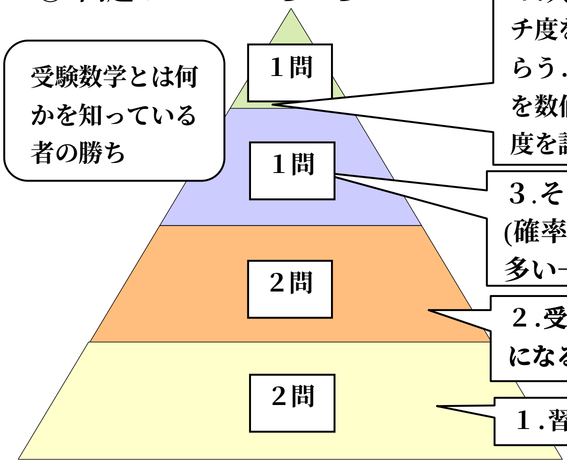
（３）<u>解けない問題</u>

学習指導要領（法律）で出せる問題，使う公式の範囲は決まっている.その範囲で思考を要する問題を作ろうとする.過去（どこかの大学で）出題された問題は絶対出さないように作成する.よって見たことがある問題は出ないと心得よ.[出題者より]

（１）（２）がヒントのことが多い「解けるものなら解いてみろ・・」

⑥ 問題のレベルいろいろ

受験数学とは何かを知っている者の勝ち



４.大学は研究機関，解けない問題に対するアプローチ度をみる.時間配分に工夫し，部分点をしっかりもらう.大学教授でも２／５人しか解けない問題.文字を数値に変え，図を描き，思考過程を残すこと.忍耐度を試すのも試験のうちとでもいうものもある.

３.その場（試験会場）での考える力をみる問題(確率，数論，新作).（１）は意外に簡単な事が多い→すべてをパスすると後で悔しい思いをする

２.受験数学のパターン問題．受験勉強をしただけ点になる.これで完解できれば有望

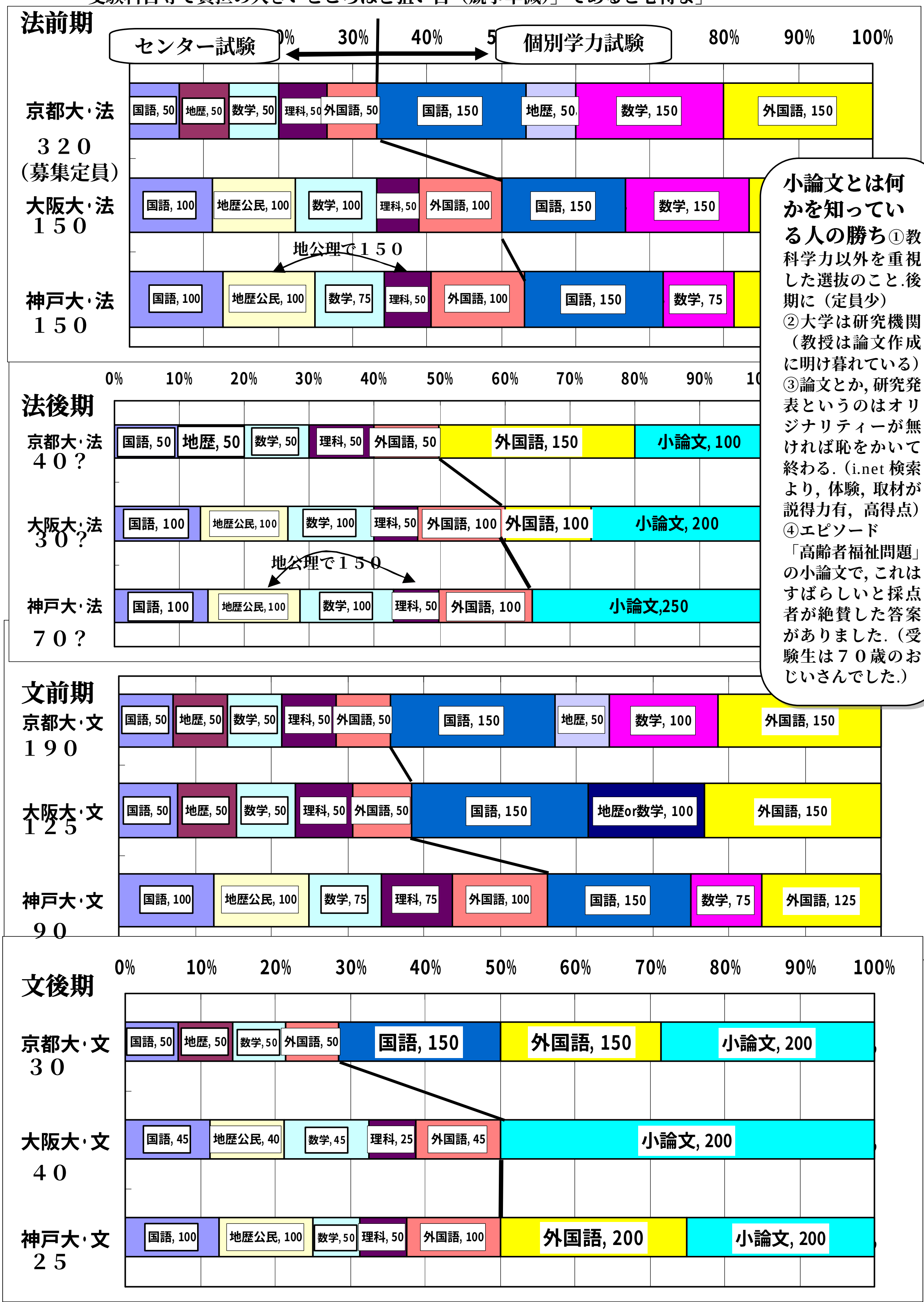
１.習熟度をみる問題.計算力をみる

限られた時間内に如何に自分の力を十分に発揮できるかを考えること.よって決してムキにならず<u>各問の（１）ねらい</u>で３０分を使うこと.センター後の大学別赤本による<u>過去問演習は，絶対に出ない問題の演習</u>になる.問題が解けなければその大学を合格できないと考えてしまうのは大きな誤りである.希に８割９割とるとんでもない受験生がいるそうだが入学式の総代にでもなりたいのかな.そんな人のことを相手にしないで制限時間内で自分の力をすべて出し切ることだけ考える.

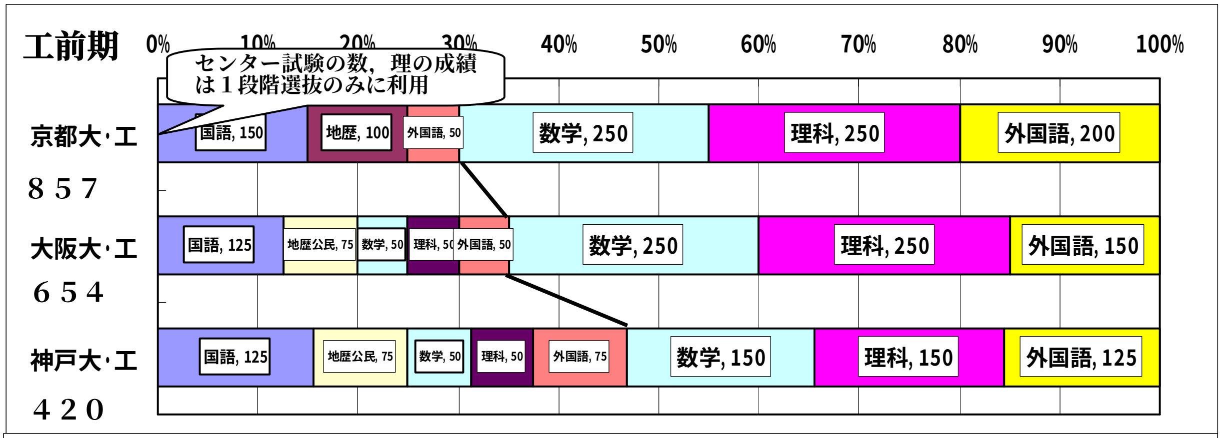
（４）受験科目 *(平成１６年度入試用・１７年度以降は必ず募集要項で確認のこと)*　　Ori.

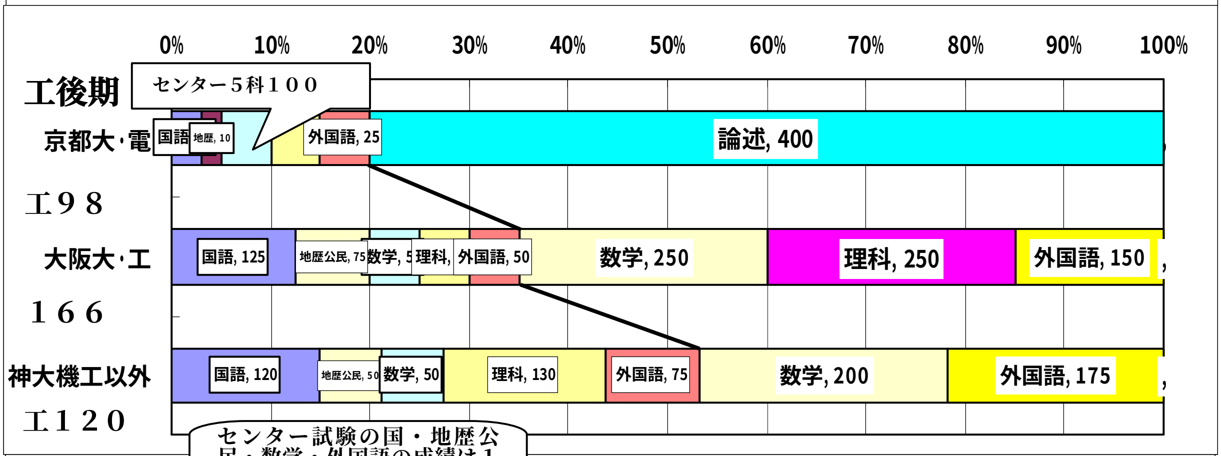
数学の重要度を確認してください．合否は総合得点で決まります．

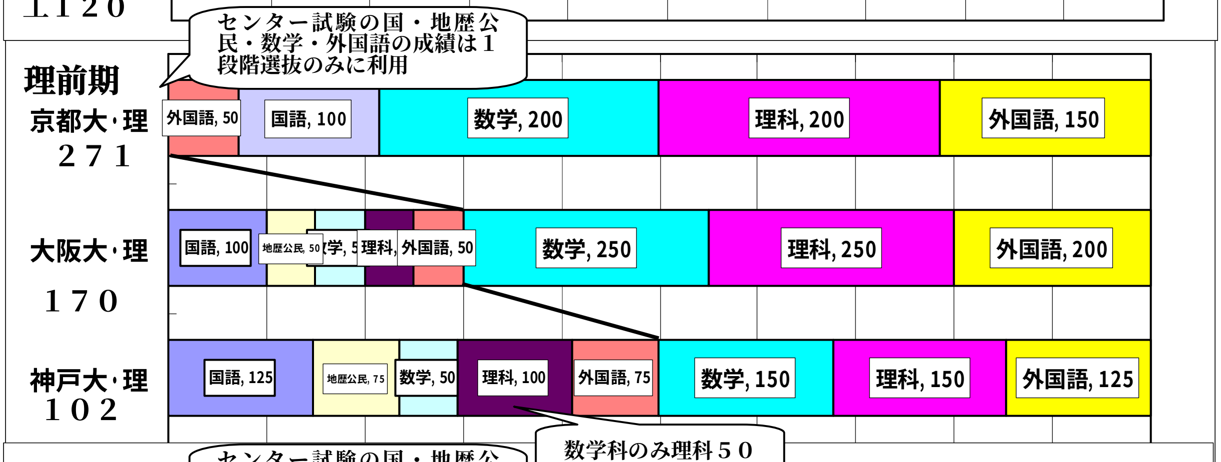
「受験科目等で負担の大きいところほど狙い目（競争率減）」であると心得よ」

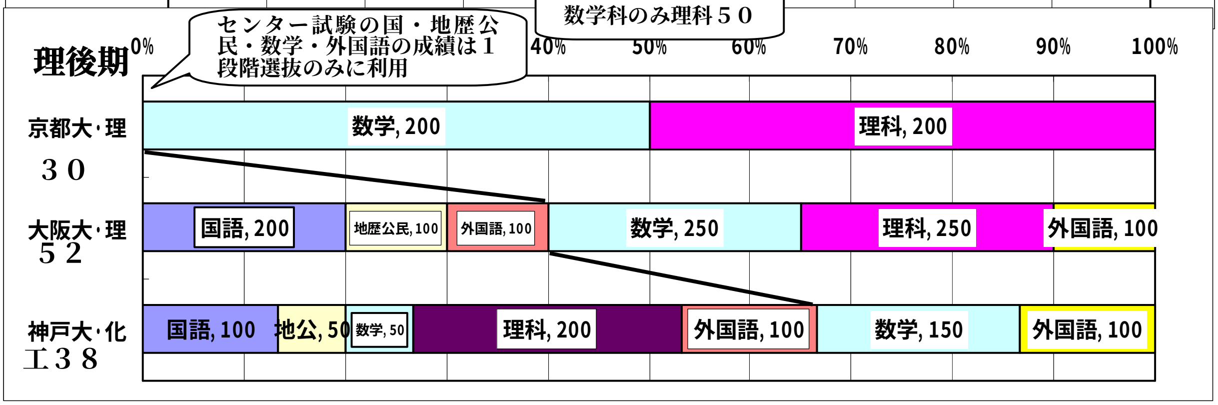


小論文とは何かを知っている人の勝ち①教科学力以外を重視した選抜のこと.後期に（定員少）②大学は研究機関（教授は論文作成に明け暮れている）③論文とか，研究発表というのはオリジナリティーが無ければ恥をかいて終わる.（i.net 検索より，体験，取材が説得力有，高得点）④エピソード「高齢者福祉問題」の小論文で，これはすばらしいと採点者が絶賛した答案がありました.（受験生は７０歳のおじいさんでした.）









募集定員は圧倒的に理系学部が多い（とにかく東大・京大・阪大へ行きたいのなら理系の工学系を狙え）
２次試験が標準化し得点率が高くなってきている、２次の配点は難関校ほど極端に大きい.文系は数国英,理系は数理英で決まる
後期（出願は前期と同時に，前期合格手続きした者は合格にならない.前期試験終了後，後期試験までの間この科目のみ勉強することになる，定員は少ないが実質倍率は大差ない）科目は学部・学科で大きく異なるので確認のこと

3 分類・体系

Ori.

（1）記号の上手な使い方

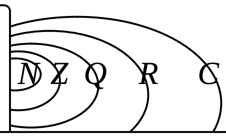
記号∈　と　記号⊂　の利用を混同しない

数学用語と日常用語を混同するな！

① N は自然数全体の集合， Z,I は整数全体の集合， Q は有理数全体の集合，
R は実数全体の集合, C は複素数全体の集合, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ ←包含関係

$\boxed{例}$1　a は実数は $a \in R$ とかく。$i \notin R$ など ←集合の要素
$\{1,2,3\} \subset N$, $A \cap B \subseteq X$ ←集合の部分集合,
$x \in R$ の方が　x は実数である　より　ノートをとるとき便利であ

Natural number
Integer, Zahlen
Quotient number
Rationalnumber
Real number
Complex number



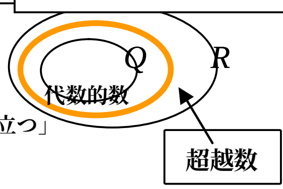
有理数は誤訳：
「比 ratio で表される数」が正しい

② **定数・定ベクトル・定行列**などは $a,b,c,\vec{a},\vec{b},\vec{c},A,B,C$
それに対し，**未知の数・ベクトル・行列**は $x,y,z,\vec{x},X,\cdot$
とするとはっきりする　[未知数と既知数は使い分ける]

③ **pとqは同値は $p \Leftrightarrow q$ とかく.iff（if and only if）を使うことも.**

$\boxed{例}$2 “等号は $a=b$ であるときに限り成り立つ”　は“等号 $\Leftrightarrow a=b$ ”とかくことも

定義として使うこともある「 $f(x)$ が $x=a$ で連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ」



$\boxed{例}$3　同値変形　$x^2 - x = 0 \leftrightarrow x(x-1)=0 \leftrightarrow x=0,1$　などとかくことも

④ **かつ(and, $\wedge$)　と　または(or, $\vee$)　を明確に**

“ p かつ q かつ r ”　は $\begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases}$ とかく.（かつは縦に大カッコで）

“ p または q または r ”, “ p, q, r ”　は“かつ”と紛らわしい
（“かつ”との区別を明確にするために　“または”, “or”と
かくこと　カンマ“　,　”は避けよう）

$\boxed{例}$4　$a<b<c \Leftrightarrow \begin{cases} a<b \\ b<c \end{cases}$

$\boxed{例}$5　場所によって異なる式で与えられる関数は最終的に

$f(x) = \begin{cases} (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) \end{cases}$ の形にまとめよう

$\boxed{例}$6　$a \leqq b \Leftrightarrow$ "$a<b$ or $a=b$"　（よって $1 \leqq 2$ は正しい命題）

英数国は同値性の学問
$x^2 = x \Leftrightarrow x = 0,1$
犬 $\Leftrightarrow$ dog
をかし $\Leftrightarrow$ 趣がある
つまり，**同値とは表現は違うが内容は同じということ.** 同値であるものはたくさんあるがそのうち**最も表現の異なるものを探すのが目的**。犬と動物，は同値でない. $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ を明確に意識した論理の展開を心がける.
数学力＝論理力＋計算力

[あのね] ∀ の女性は、美しい。
美しくない女性は∃しない

⑤ **全称記号 ∀　は，all，any　のことで，すべての　あらゆる　常に・**
存在記号 ∃　は，exist　のことで，ある　存在する　少なくとも１つ

$\boxed{例}$7 “すべての自然数 n に対して $n(n+1)$ は偶数”は“ $^{\forall}n \in N$: $n(n+1)$ は偶数”

$\boxed{例}$8 “ $x^2 = x$ なる実数 x が存在する”は“ $^{\exists}x \in R$: $x^2 = x$ ”とかく

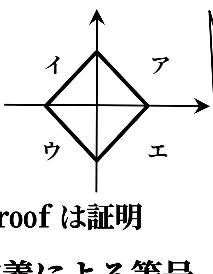
∀∃∧∨¬→
All と Exist
かつ，または，でない，ならばに留意

⑥ **式等に番号を付けるとき①②③（＊）をよく使う．　場合分けは必ず見出し番号を付ける**
（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）（ⅳ）もよく使うが（ア）（イ）（ウ）を使うと決めておくと良い

$\boxed{例}$9　$|x|+|y|=1$ ←２次元絶対値の問題

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）（ⅳ）は世界共通（ア）（イ）（ウ）は日本のみ，日本ではアイウも使え　[覚え方]場ｉ分け，場アイ分け

（ア）$x \geq 0, y \geq 0$ のとき，$x+y=1$
（イ）$x<0, y \geq 0$ のとき，$-x+y=1$
（ウ）$x<0, y<0$ のとき，$-x-y=1$
（エ）$x \geq 0, y<0$ のとき，$x-y=1$



[コツ] ２次元絶対値のはずし方
絶対値の中が０となるときを境界として平面を分け　その各々で絶対値をはずす

⑦ **Def.　は definition（定義），Th.　は Theorem（定理），Proof は証明**

∴ は“ゆえに”　，　∵ は“なぜならば”　，　$\overset{by\ def}{=}$　は定義による等号

（２）プロパティー

複素数

- の　分母の実数化
- の　絶対値
- の　偏角
- の　実部
- の　虚部
- の　共役複素数
- の　極形式
- の　n 乗定理
  (ド・モアブルの定理)
- の　作用素とみた規則
- を　解に持つ方程式
- の　和差積商

数列

- の　階差数列
- の　一般項
- の　部分和
- の　一般項の極限
- の　部分和の極限（無限和）
- の　部分数列
- の　仕切り（群分け）

行列

- の　トレース
- の　行列式の値
- の　C．Hの次数下げ定理
- の　固有値
- の　固有ベクトル
- の　固有方程式
- の　対角化行列
- の　対角化
- の　逆行列
- の　n 乗
- の　１次変換とみた規則
- の　和差積　スカラー倍
- の　直和分解

確率変数

- の　確率分布表
- の　平均（期待値）
- の　分散
- の　標準偏差
- の　独立

[資料の]ヒストグラム
平均値　分散　標準偏差
メジアン　モード　相関係数

実数

- の　整数部分と小数部分
- の　分母の有理化
- の　大小比較
- の　桁数
- の　分類　有理数か無理数か

ベクトル

- の　和差スカラー倍
- の　成分表示
- の　同じ方向の単位ベクトル
- の　向きと大きさ
- の　基底への分解
- の　垂直なベクトル
- の　１次独立性
- の　線型和問題
- の　内積
- の　外積

関数

- の　定義域　値域
- の　周期
- の　微分（導関数）
- の　積分（リーマン和と極限）
- の　逆関数
- の　増減表　　凹凸表
- の　グラフ
- の　最大最小
- の　変曲点
- の　極値の分離問題
- の　引ける接線の数
- の　媒介変数表示
- の　漸近線
- の　テイラー展開
- の　連続性と微分可能性
- の　１次近似，２次近似
- の　合成
- の　原始関数
- の　リーマン和と積分可能性

[あのね]　0と1と・・・

① 0が分母の数は定義できない（電卓でＥエラー）
$\frac{0}{0}$ は不定（$0x=0$）、$\frac{1}{0}$ は不能（$0x=1$）
でいずれも、認められない存在。　しかし、
極限 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ が $\frac{0}{0}$ となるときはとりあえず不定形。

② 数列では0が添え字は定義されていません．
数列は自然数 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ からの対応です
から a_0, S_0 はない。初項は絶対に a_1, S_1 です。

③ 0と1が赤い糸で結ばれている。（定義する）
$a^0=1$，$0!=1$，${}_nC_0=1$

④ ビッグファイブ（$1, 0, \pi, e, i$）が手をつなぐ.
$e^{\pi i}+1=0$　は　美の極致
[覚え方]「イーおっパイのアイ人は1人もいない」

⑤虚数に大小関係は定義しない $a+bi<c+di$ ×
都合の良い様に定義する　悪いものは定義しない

（３）本来の数学の分類　①代数学・線形代数学

Ori.

	実数 R real number	（旧課程）複素数　C Complex number	ベクトル　V　vector 平面・空間	行列　M　matrix 一般と２×２　３×３
演算	四則演算 （＋－×÷）	$i \overset{def}{=} \sqrt{-1}$　　$i^2 = -1$ 四則演算（＋－×÷）	ｽｶﾗｰ倍 和差（＋－） 内積$(\cdot) \in R$　外積$(\times)$	ｽｶﾗｰ倍 和差積（＋－　） 積の定義が独特
顔	定数は $a, b, c, \cdots$ 未知数は $x, y, z, \cdots$ [illegible]分 微積の顔は $f'(x)$ と $\frac{dy}{dx}$	①$a + bi$ ②$w, z, \alpha, \beta, \gamma$ ③$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ３つの顔の混在が特徴	①→②→③と進化する ①$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OP}$ ②$\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{x}$ 顔を変える ③(x, y), $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$ $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$	①$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ A に対し $tr(A)$ $\Delta(A)$ など ②$A, B, C \cdots O, E$ ミックス状態で処理
単位	0，1	i（虚数単位） α に対し $\bar{\alpha}$ $\vert\alpha\vert$ $\arg\alpha$ など	$\vec{0}$，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$（基本ベクトル）	O, E（単位行列）
	実関数	複素関数 $w = f(z)$	線形写像 線型性　$\vec{v} = f(\vec{u})$	１次変換 $f(\vec{u}) = A\vec{u}$ A^{-1} を持つものと持たないもの
２大分類	正と負と０ 有理数と無理数	実数と虚数		正則と非正則
重要定理と公式	$a^2 \geq 0$ **実数の連続性**は私達にとって，空気のように必要性に気がつかないが・・	ド・ﾓｱﾌﾞﾙの定理 n 乗→n 倍 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ $= \cos n\theta + i\sin n\theta$	１次独立性　$\vec{a}, \vec{b}$ 平行でなく $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow s = t = 0$	ｹｰﾘｰ・ﾊﾐﾙﾄﾝの定理 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$ ２乗→１乗 逆行列の公式 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ （共に２次限定）
違いを認識	$\vert y - x \vert^2$ $= (y - x)^2$ 微積分学の基本定理	$\vert\beta - \alpha\vert^2$　数は絶対値 $= (\beta - \alpha)\overline{(\beta - \alpha)}$ 代数学の基本定理	$\vert\vec{b} - \vec{a}\vert$　ベクトルは大きさ $= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$	$A \neq kE$ のときは $pA + qE = O \Leftrightarrow p = q = 0$ $\vert A \vert$ は行列式
テーマ	大小関係は実数だけ 不等式は実数を前提とする 極限 積分　微分 代数的数 $\sqrt{2}$ Q　R 代数的数 超越数 π, e	１．方程式の解としての複素数 実係数→共役ペア 二項方程式（円周等分） ２．複素数平面上の点としての複素数 （３点幾何） $\frac{w - \alpha}{z - \alpha} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ３．作用素としての複素数 （複素変換） 和は平行移動 積は回転と拡大	１．交点ベクトル問題 $\overrightarrow{OP} =$（l 上より） $\overrightarrow{OP} =$（m 上より） ２．線形和問題 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ３．計量問題 大きさ $\vert\vec{a}\vert^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ なす角 $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vert\vec{a}\vert \vert\vec{b}\vert}$ 垂直 ⇔ 内積＝0 ４．空間図形の方程式 直線・平面・球面	１．性質 一般に $AB \neq BA$（非可換） $AB = O \Rightarrow A = O, B = O$ とは限らない． （零因子は存在する） $A \neq kE$ の時 $pA + qE = O \Leftrightarrow p = q = 0$ ２．行列方程式 ケーリー・ハミルトンの定理で次数下げ１次へ 例　$A^2 = E$ ３．行列の n 乗問題 A^n ４．１次変換（新課程） 正則変換　非正則変換 回転と拡大・線対称

②解析学（無限を扱った数学）
極限の限りなく近づく論法
数列・漸化式

$a_n, \lim_{n\to\infty} a_n$

$S_n, \lim_{n\to\infty} S_n$

関数（微積分学）
極限　グラフ接線・
面積・体積・曲線の長さ
微分方程式

③確率･統計学
順列・組合せ　　　確率
確率分布・平均・分散・標準偏差
二項分布と正規分布　検定・推定
資料の整理と代表値　メジアン･
モード･レンジ，平均値･分散･標準偏差，相関係数

式
- 等式
  - 恒等式
  - 方程式
  - 定義式
- 不等式
  - 絶対不等式
  - 条件不等式

整方程式には
二項（円周等分）方程式
相反方程式
虚数係数の方程式
実係数の方程式など

④数学基礎論
集合・論理　必要十分
逆・裏・対偶　証明
背理法　数学的帰納法

⑤幾何学
ユークリッド
三角形
図形と方程式
領域　軌跡
２次曲線

初等関数
整関数
分数関数
無理関数
三角関数（円関数）
指数関数
対数関数
逆三角関数
双曲線関数
逆双曲線関数
特殊関数
超関数

関数の表現
① 陽関数
（1変数･2変数）
② 陰関数
③媒介変数表示
④極方程式

点Pが図形上にある条件を極座標(r,θ)の関係式で表したものが極方程式,位置ベクトルで表したものがベクトル方程式,(x,y) で表したものが普通の方程式,特に空間図形の方程式は空間ベクトルの応用として出題されるので注意

実数列$\{a_n\}$　　複素数列$\{z_n\}$
関数列 $\{f_n(x)\}$　　直線群l_n
曲線群C_n, $F(t,x,y)=0$
行列列 $\{A_n\}$　　点列 $\{P_n\}$

（４）[Def.]集合と写像

集合と演算
複素数（＋，－，×，÷）　　行列（＋，－，積，スカラー倍）
ベクトル（＋，－，スカラー倍）関数（和，差，積，商，合成）

A,Bを集合とする
対応　集合間の要素の対応
写像　Aの<u>どの元</u>にもBの元をを<u>ただ１つ</u>対応させる規則をAからBへの写像という

f ：**１対１**(1to1)**の写像** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x_1,x_2\in A$;「$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$」

f ：**上への**（onto）**写像** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall y\in B;\exists x\in A$;「$f(x)=y$」

f ：**線形写像** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x,y;\ f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(kx)=kf(x)$

[写像のキーワード]
どの元
ただ１つ

合成写像　$(f\circ g)(x)\overset{def}{=}f(g(x))$，**逆写像**　$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
関数　数の集合から数の集合への写像
変換　同じ集合AからAへの写像，**１次変換**　$f(\vec{x})=A\vec{x}$なる$f:V\to V$

①１対１のとき
逆写像は存在
②$x=$（yの式）
xとyを入替える
③グラフは
$y=x$対称

（５）[Def.]相等の定義[いろいろ]

①集合　$A\subset B\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall x[x\in A\Rightarrow x\in B]$　，$A=B\overset{def}{\Leftrightarrow}A\subset B\wedge A\supset B$

②関数　$f=g\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall x:f(x)=g(x)$

③複素数　$a,b,c,d\in R;a+bi=c+di\overset{def}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$

$\boxed{性質}$ $s,t,s',t'\in R$　$\vec{a},\vec{b}$が１次独立

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}s=s'\\t=t'\end{cases}$

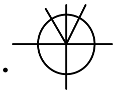
④ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\overset{def}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$

$\boxed{性質}$ちょっと注意すべきは極形式（旧課程）
$r(\cos\theta+i\sin\theta)=R(\cos\theta'+i\sin\theta')$
$\Leftrightarrow\begin{cases}r=R\\\theta=\theta'+360°\times k\end{cases}$　（kは整数）

エッだめ？
$\theta=\theta'$

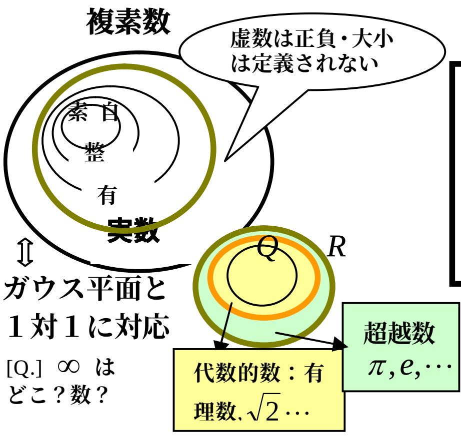
⑤行列 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\overset{def}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a=a'\\b=b'\\c=c'\\d=d'\end{cases}$

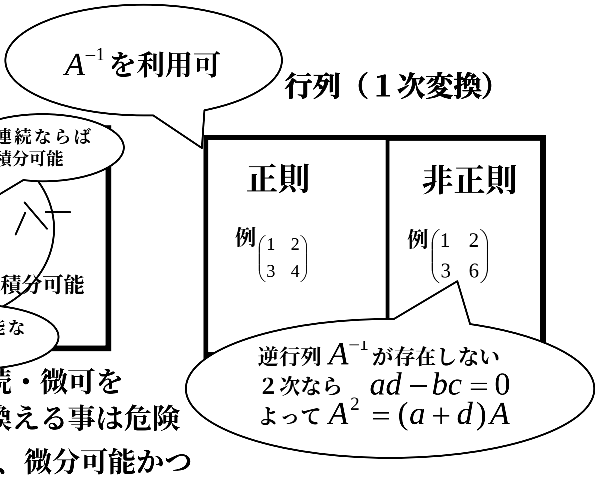
・$\sin\alpha=\sin\beta$、
$\Leftrightarrow\alpha=\beta$，$\alpha+\beta=\pi$ ・・・・



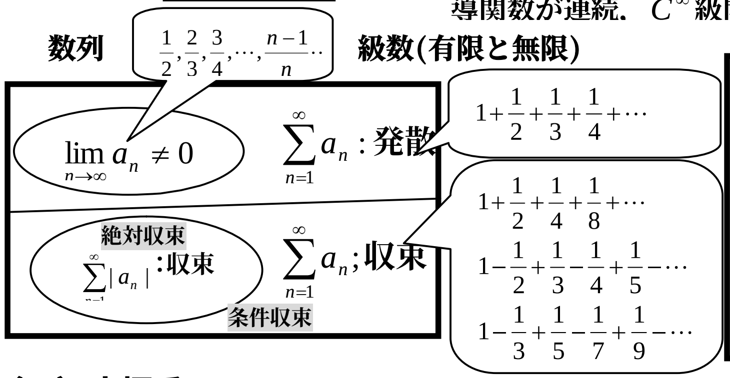
・$\log\alpha=\log\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta\leftarrow$**１対１より**

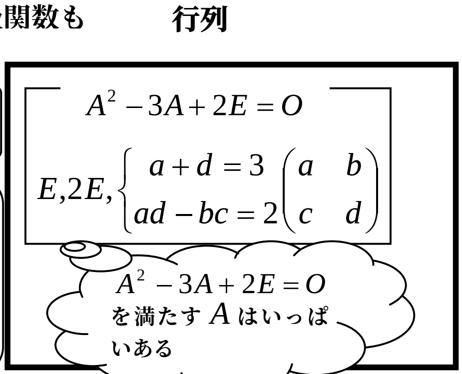
（6）集合と包含関係[いろいろ]



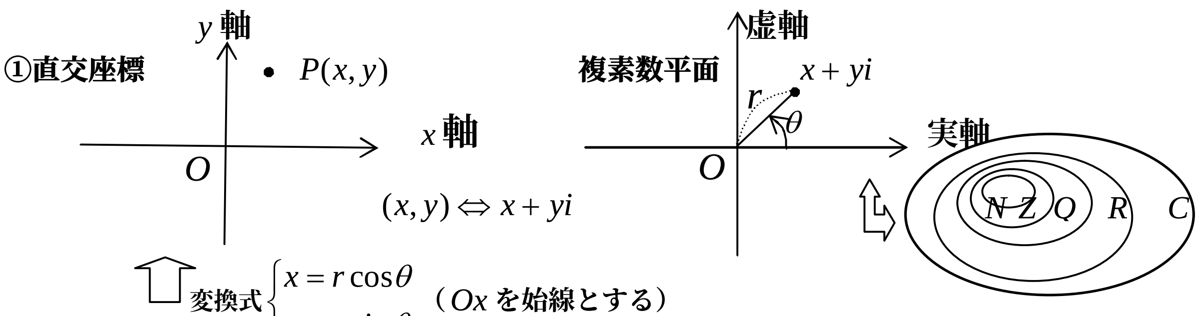


抽象関数の連続・微可を
グラフで置き換える事は危険
C^1級関数とは、微分可能かつ
導関数が連続.　C^∞級関数も



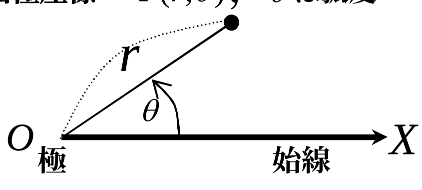


（7）座標系 [いろいろ]　$x, y \in R, r>0$ 原点はO(origin)　座（位置）標（印）[例　囲碁・将棋]



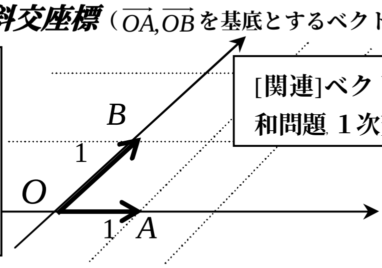
変換式 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ （Ox を始線とする）

②平面極座標　$P(r,\theta)$,　θ は弧度



[角の単位]
地球１年約360日から（プトレマイオス）∴地球に由来の度と普遍的なラジアン

③**斜交座標**（$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を基底とするベクトル座標）



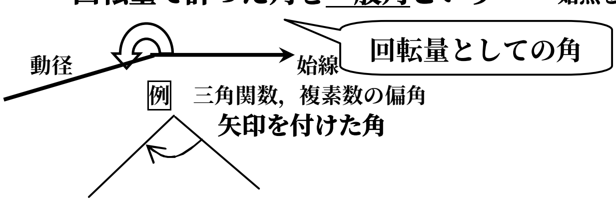
[関連]ベクトルの線形和問題 １次変換の問題

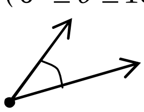
（8）[Def.]角　[単位]度,ラジアンは角の単位.度は温度にも（ダース,モルは個数の単位、ドルと円は・）

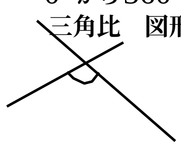
①始線から時計の針と反対方向を正として**回転量で計った角を一般角という**

②**ベクトルのなす角と図形のなす角**
始点を同じ点とする小さい方の角
（$0°\leq\theta\leq180°$）

③**角度**＝角の大きさ
分度器で計った角
$0°$ から $360°$ まで
三角比　図形のなす角







（９）直線の方程式[いろいろ]　空間直線も含む　――――――――――――――――――――――――――Ori.

$y=ax+b \quad x=p$ ，　$ax+by+c=0\ (a^2+b^2\neq 0)$ ，　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\,(ab\neq 0)$

$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$ ，$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ ，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ，$\begin{cases}x=x_1+at\\y=y_1+bt\end{cases}$ ，$\vec{x}=k\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ ，$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=1)$ ，$\vec{x}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ ，$\vec{x}=\dfrac{s\vec{a}+t\vec{b}}{s+t}$ ，$|\vec{x}-\vec{a}|=|\vec{x}-\vec{b}|$

$z=\alpha+t\beta$ ，$|z-\alpha|=|z-\beta|$ ，$\theta=\alpha$ ，$r\cos(\theta-\alpha)=p$ ，$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$

空間平面　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ，$\vec{x}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$ ，$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\ (s+t+u=1)$ ，$ax+by+cz+d=0$

（１０）円(球面)の方程式[いろいろ]　―――――――――――――――――――――――――――――――

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 　$r>0$ ，　$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$ ，　$\begin{cases}x=r\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\y=r\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ ，　$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 　$\left(\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c>0\text{のとき円}\right)$

$|\overrightarrow{CP}|=r$ ，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ ，$|\vec{x}-\vec{a}|=r$ ，$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ ，$|\vec{x}-\vec{a}|=k|\vec{x}-\vec{b}|$ 　$k\neq 1$（アポロニウスの円）

$|z-\alpha|=r$ ，　$|z|^2-\bar{z}\alpha-z\bar{\alpha}+|\alpha|^2=r^2$ ，　$|z-\alpha|=k|z-\beta|$ 　$k\neq 1$（アポロニウスの円）

$r=a$ ，　$r=2a\cos\theta$ ，球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

（１１）文字方程式・文字不等式[いろいろ]

2次曲線 $FP:PH=e:1$ ① $P(x,y)$ ② $P(r,\theta)$

$ax^2+bxy+cy^2+fx+gy+h=0$ 　（一般形）

① x の方程式 $ax=b$ を解け $(a,b\in R)$

（ア）$a=0$ のとき，$0\cdot x=b$ 　より

（ｉ）$b=0$ のとき　x は任意の実数

（ii）$b\neq 0$ のとき　x の解はなし

（イ）$a\neq 0$ のとき，$x=\dfrac{b}{a}$

② x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in R)$ を解け

（ア）$a=0$ のとき，$bx=-c$ 　より

見かけ上の２次方程式という

（ｉ）$b\neq 0$ のとき　$x=\dfrac{-c}{b}$

（ii）$b=0$ のとき　$\begin{cases}c=0 & \text{なら　}x\text{は任意の実数}\\c\neq 0 & \text{なら　解はなし}\end{cases}$

（イ）$a\neq 0$ のとき，　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\begin{cases}\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{2実数解}\quad b^2-4ac>0\\[2ex] \dfrac{-b}{2a} & \text{重解}\quad b^2-4ac=0\\[2ex] \dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a} & \text{共役な2虚数解}\quad b^2-4ac<0\end{cases}$$

$ax^2+bx+c=0$ を
$az^2+bz+c=0$ と書かれるとドキッとしませんか
$\alpha^2=\beta,x^2=\alpha,z^2=\alpha$
$A^2=A$，$X^2=X$ など文字の使い方に振り回されるな.

③文字１次不等式　[重要]　１次なら $a\neq 0$

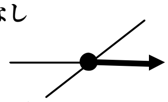
x の不等式 $ax\geq b$ を解け $(a,b\in R)$

（ア）$a=0$ のとき，$0\cdot x\geq b$ 　より

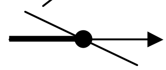
（ｉ）$b\leq 0$ のとき，x は任意の実数

（ii）$b>0$ のとき，x の解はなし

（イ）$a>0$ のとき，$x\geq\dfrac{b}{a}$



（ウ）$a<0$ のとき，$x\leq\dfrac{b}{a}$



④１次の行列方程式　１次なら $a\neq 0$

行列方程式　$aX=bE$ をとけ $(a,b\in R)$

(ｱ) $a\neq 0$ のとき $X=\dfrac{b}{a}E$

(ｲ) $a=0$ のとき $0X=bE$ より

$\therefore b=0$ のとき任意，$b\neq 0$ のとき　なし

⑤二項方程式（円周等分方程式）$z^n=\alpha$ は両辺極形式の顔に変えド・モアブルで解く（n 乗根）

⑥連立方程式 $\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$ の形の解 x,y は２次方程式 $t^2-at+b=0$ の２つの解である

最低限マスターしていなければならない重要テーマ

旧帝大レベルではテーマ内で各テーマの一番難しいものので構成される。一歩踏み込め、一般化をマスターせよ。

□は理系　☆は特に重要

＜ベクトル＞

- ☆ 交点ベクトル問題　$\overrightarrow{OP}$ を２通りに表す。２等分線・垂線・円・平面との交点
- ベクトルの線形和問題　斜交座標，$\alpha+\beta\leq 1, \alpha\geq 0, \beta\geq 0$ は三角形の内部と境界、空間
- 空間ベクトルと計量　基底　共線・共面条件,平面との交点，外積,面に垂直，体積，最短,角度
- 空間図形の位置関係の問題　直線・平面・球面の方程式，１点と平面との距離

＜複素数＞

- 整方程式の解の分離問題　実係数の高次方程式、共役ペアと複素数平面,解と係数の関係
- 旧 二項方程式（円周等分方程式）の応用　例 $x^n+\dfrac{1}{x^n}=1$，$x^3+|x|+1=0$，複素数の極形式
- 旧 スパイラル点列・複素点列　$w=z^n$，$z_{n+1}=\alpha z_n+\beta$，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$
- 旧 複素数平面上の３点幾何（回転と拡大）$\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\vec{x}_{n+1}-\vec{\alpha}=kR(\theta)(\vec{x}_n-\vec{\alpha})$
- 旧 複素変換の問題　作用素（和と積の意味），顔を変える

＜図形と方程式＞

- 座標設定して解く問題　計算が簡単になる座標設定を行う
- 領域における最大最小　２次元絶対値，曲線群，距離の２乗，傾き(場合分け)
- 円と直線,円と放物線の位置関係の問題　d と r の関係から，円の中心との補助線を引く
- 線対称の問題　垂直かつ中点が直線上，x 軸対称移動と回転（１次変換）
- 点の軌跡の問題　軌跡を求めたい点を (X,Y) と置きその関係式を求める，変域に注意
- ☆ 曲直線群の通過領域の問題　パラメータの実数条件,x 固定 y の値域,接線群,$(x-\alpha)^2$ 包絡線
- ２次曲線の性質の問題[理系]　上の点の表し方①(x_0,y_0)，②パラメーター，③極方程式(r,θ)

＜関数＞

- ２次方程式の解の分離問題　判別式と軸の位置と端点での符号,定数分離が有効なことも
- ☆ 指数・対数・三角関数の実数解の個数　$y=f(x)$ 難を $t=g(x)$ 易と $y=h(t)$ 易のグラフに帰着
  対数方程式→真数条件と２次の解の分離に帰着
- ☆ $F(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)$ 方程式・不等式・関数　三角関数の次数下げ公式と単振動合成
- 文字　対数・指数・三角不等式　真数・底の条件，底を揃える，場合分け。角を揃える　グラフ

＜微積分＞

- 区間における最大最小問題　文字係数 場合分けを根気よく　２変数関数　ノミネート方式
- ３次関数の極値の分離問題（解の分離）　２次関数 y' のグラフの形状に帰着
- ☆ 一般の関数の極値の分離問題[理系]　y' のグラフの形状に帰着
- 引ける接線の本数の問題　$\boxed{\text{グラフ}}$と$\boxed{\text{変曲点での接線}}$と$\boxed{\text{漸近線}}$が場合分けの境界[知ッ得]
- 共通接線の問題　$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$　一方が直線のときも.円は法線が中心を通る
- ＊ 絶対値の定積分　③←②←①　主役は積分する変数

☆ 放物線と接線とで囲まれた部分の面積　$S=\frac{|a|}{6}幅^3$ [6分の3乗公式] $\int_{接点}^{\beta}(x-接点)^2dx$ の形へ

☆ 滑ることなく転がる点の軌跡など[理系]　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CP}$　ベクトル的に

$\int\log(x+1)dx$　$\int\sin^2 xdx$　S・V・L[理系]　マップで丸暗記、面積・体積・曲線の長さ

＊ 積分方程式 $\int_a^b(x-t)f(t)dt$, $\int_a^x(x-t)f(t)dt$　x を外へ出してから定数 p,q と積の微分

＊ 空間図形・非回転体の格子点，体積　$z = k$，1つの座標を固定して切断平面に帰着

平均値の定理の応用と区分求積法　関数値の差，リーマン和　が見えてくるように

＊ 時刻 t における質点の位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル，距離，速さ，道のり。水の問題

＜数列＞

☆ 等差×等比型数列の和（と極限[理系]）　S_n-rS_n, $\lim_{n\to\infty}nr^n$，$2^n>1+n+\frac{n(n-1)}{2}$

不等式と極限→はさみうち論法[理系]　$e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2\ (x>0)$，$x-1<[x]\le x$，積分不等式

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型漸化式　$f(n)$ が1次なら差で，指数なら割って消去

a_n と S_n を含む漸化式　$\begin{cases}a_1=S_1\\ a_n=S_n-S_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots)\end{cases}$　で $\{a_n\}$ または $\{S_n\}$ のみに

☆ $a_{n+1}=f(a_n)$ 型漸化式の $\lim_{n\to\infty}a_n$ の問題　はさみうちの原理，ロジステック関数・周期点，くもの巣

格子点の数の問題，群数列の問題　一方向固定，具体的な部分から一般へ主役は群番号

＜確率＞

グループ分け問題の2パターン　ホテルのロビーと部屋への分かれ方の違い

☆ さいころ2個3個問題・順列組合せの確率　異なるとみて同様に確からしい根元事象と標本空間

☆ 確率漸化式（場合の数漸化式）　n 回後と $n+1$ 回後の推移の図，p_{n+1} を p_n との関係で捉える

X の確率分布・平均（期待値）・分散・標準偏差　資料の整理ではメジアン・モード・相関係数

☆ たまねぎ型確率　対称性のある点の移動問題　時系列の問題　期待値と二項定理の応用

＜行列＞

行列の性質　変な積の定義より→交換法則が不成立，零因子が存在，逆行列の定義と公式

＊ 行列方程式　ケーリー・ハミルトンの次数下げ定理で1次の行列方程式に帰着

☆ 行列の n 乗問題　パターン分類，対角化、直和分解、固有値・固有ベクトル

行列列の問題　行列漸化式 $A_{n+1}=PA_n+Q$ 型その他，$E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}$

一次変換　正則と非正則，不動点と不動直線，回転と拡大の合成，線対称変換

＜証明＞

☆ 数学的帰納法の原理　証明すべき式の書き出し　(I) $P(1)$, (II) $[P(k)\Rightarrow P(k+1)]$ の証明

整数解問題・整数論・論証　$ax+by=c$，$AB=p$ の形、素数・互いに素がキーワード

必要十分の判定の問題　→は“ならば例外なく”と読み反例を探す、真理集合を図示利用

5 定理・公式のまとめ

0ri.

（1）証明も出る超重要定理・公式　[基本公式は複雑化して出題される・証明まで]

□ ①ド・モアブルの複素数の n 乗定理　[旧課程]　新課程でも出る

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad n \in I$　←[証明頻出]数学的帰納法で　[難→易]

□ ②ベクトルによる三角形の面積の公式　←[証明頻出]

$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$　　$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$　より

□ ③三角形の正弦定理と余弦定理　[覚え方]×定理と○定理　[難→易]

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　[証明]教科書参照のこと

□ ④三角形の加法定理←[証明]三角関数の定義により（東大）　[複雑化] [難→易]

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$　（←2 直線のなす角で利用）

□ ⑤複素数　$|z|^2 = z\bar{z}$　←[証明] $z = x + yi \quad (x, y \in R)$ で計算して示す[旧課程]

重要だが簡単なので出題されない

□ 積分のコーシー・シュワルツの不等式

$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$　ただし，$a < b$←この条件は重要

[証明]常に $f \neq 0, g \neq 0$ のとき $\forall t; \int_a^b (tf+g)^2 \geq 0 \therefore \forall t; t^2\int_a^b f^2 + 2t\int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geq 0$

$\therefore D/4 = \left\{\int_a^b fg\right\}^2 - \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0$　より得る（等号 $\Leftrightarrow \forall t: tf + g = 0 \Leftrightarrow f = kg$）

□ ⑦相加平均と相乗平均の関係　[複雑化]

$a > 0, b > 0$ のとき，$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　（等号 $\Leftrightarrow a = b$）　[証明]差が正を示す

□ ⑧Wallis（ウォリス）の公式（ア）n が偶数のとき $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

（イ）n が奇数のとき $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$

[証明] $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' dx$

$= \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x dx = 0 + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \quad \therefore I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$

□ ⑨ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$　←[証明]幾何学的に，はさみうち論法で，角は弧度法に注意　[複雑化]

□ ⑩ 2 次の正方行列のケーリー・ハミルトンの次数下げ定理（n 次は大学で習う）[難→易]

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$　[証明]代入すれば得る

□ ⑪ 2 次の正方行列：$A\vec{x} = \vec{0}$ が $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解をもつ $\Leftrightarrow \Delta(A) = \Delta = ad - bc = 0$（$A^{-1}$ が存在しない，非正則）　[証明] 2 直線の位置関係からが明快

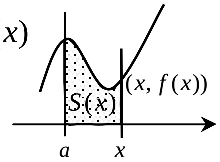
⑫ 2次の正方行列の逆行列の公式　（n 次は大学で習う）

$ad-bc\neq 0$ のとき $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ←[証明] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$ad-bc=0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ は存在しない

⑬微積分学の基本定理　$f(x)$:連続, $S'(x)=f(x)$ ただし $S(x)$ は面積　$\boxed{\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)}$

[証明]　図と $S'(x)\overset{by\ def}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{hf(t)}{h}=\lim\limits_{t\to x}f(t)=f(x)$



⑭ $\vec{a},\vec{b}$ が1次独立の時　$p\vec{a}+q\vec{b}=\vec{0}\ (p,q\in R)\Leftrightarrow\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$　　証明

⑮ $A\neq kE$　の時，$pA+qE=O\ (p,q\in R)$ ⇔ $\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$　　証明

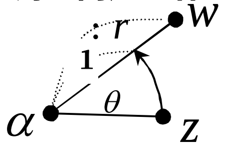
$A\neq kE$　の時，$pA+qE=p'A+q'E\ (p,q,p',q'\in R)$ ⇔ $\begin{cases} p=p' \\ q=q' \end{cases}$

$A\neq kE$　の時，$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E\ (p,q,p',q'\in R)$ ⇔ $\begin{cases} p=p' \\ q=q' \end{cases}$

（2）出題される公式（この公式を試す為に問題を作る）

旧 ①　3点の位置関係（回転と拡大）

$\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad\Leftrightarrow$



[覚え方] α 君は右バッター

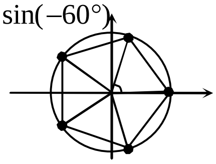
[複素数平面は旧課程]

② z :実数 ⇔ $z=\bar{z}$　，z : 純虚数 ⇔ $z+\bar{z}=0\ \wedge\ z\neq 0$

旧 ③ 複素数平面上の3点 α,β,γ が

正三角形 ⇔ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$　または　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)$

一直線上 ⇔ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数　，　直角 ⇔ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数



旧 ④ 二項方程式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0, 0^\circ\leq\theta<360^\circ)$ とすると

$z^n=\alpha\Leftrightarrow r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$\Leftrightarrow\begin{cases} r^n=r' \quad (r,r'>0) \\ n\theta=\theta'+360^\circ\times k \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} r=\sqrt[n]{r'} \quad (r,r'>0) \\ \theta=\dfrac{\theta'}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times k \end{cases}$

二項方程式は
①まず絶対値を決め
②そのあと偏角を決める
各々独立にも求められる

⑤解と係数の関係($a\neq 0$) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解 $\alpha,\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3解 $\alpha,\beta,\gamma\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

ω（オメガ）の性質 $\omega^3=1,\omega^2+\omega+1=0$　（$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$）

きたない数は出所を使う

⑥ 作用素　回転は $(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)$，特に $+90^\circ$ 回転は i を掛ける

または $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，特に $+90^\circ$ 回転は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を掛ける，平行移動は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

⑦ 次数下げ公式 $\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$ [複雑化] [難→易]

⑧ 単振動合成の公式[覚え方]ＳＯＳの公式 [複雑化] [難→易]

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

☆cos への単振動合成の公式もある　$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$

[覚え方] 左辺を (a,b) と単位円周上の $(\cos\theta,\sin\theta)$ の内積と考えれば明白

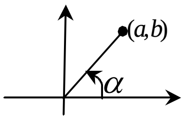
「ＯＳＯは綱引き（－マイナスが付く）」

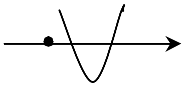
$\sin(\theta+\alpha)=\cos(\theta+\alpha-90°)$ を利用して cos への合成に直すのを混乱を避けるために推奨する

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha-90°)$

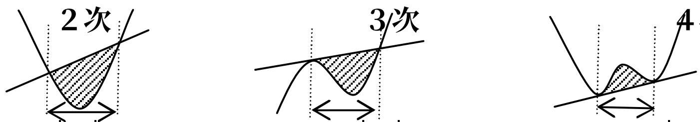
旧 ⑨ 複素数の極形式も同様 $a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

但し $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



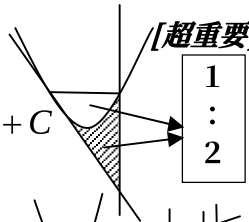
⑩ 解の分離　２解とも k より大 ⇔ $\begin{cases}\alpha>k\\ \beta>k\end{cases}$ ⇔  ⇔ $\begin{cases}D>0\\ 軸>k\\ f(k)>0\end{cases}$ [複雑化]

⑪ 面積の公式　[覚え方]６３３で１２年大学４年で卒業し３０歳でゴールイン [複雑化]

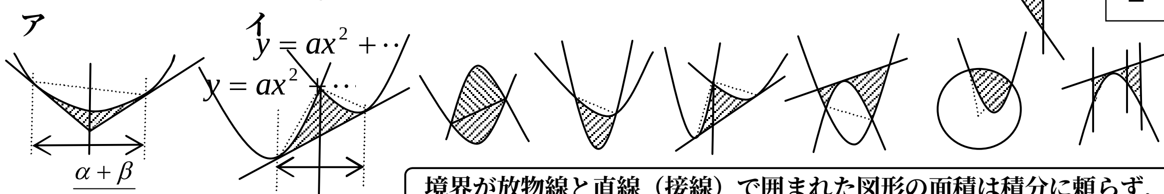


a（最高次の係数）と幅で決まる量

$S=\frac{|a|}{6}$幅^3　　$S=\frac{|a|}{12}$幅^4　　$S=\frac{|a|}{30}$幅^5



$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$，$\int(x-\alpha)^n dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$



アイ $S=\frac{1}{2}\frac{|a|}{6}$幅^3

境界が放物線と直線（接線）で囲まれた図形の面積は積分に頼らず，公式で処理する気持ちで解かないと間に合わない．接線がｘ軸になっているケースを見抜けるように訓練を

⑫ 微積分学の基本定理　$f(x)$：連続のとき $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ ←不定積分は原始関数の1つ

⑬ １点と直線・平面との距離 $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

[覚え方]ルートぶんの絶対値(絶対値なし)も

⑭平均 $m=E(X)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，分散は $V(X)=E(X^2)-m^2$ で計算[X 複雑化]

分散＝2乗の平均－平均の2乗

標準偏差 $\sigma(X)\overset{def}{=}\sqrt{V(X)}$，相関係数は $r_{xy}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ で計算する

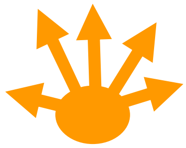
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
$E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(aX+b)=a^2V(X)$
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

⑮確率の反復試行定理と二項分布（n 回中，当たりが常に p，r 回当たる確率は）

$P(X=r)=P_r={}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$ $(r=0,1,2,\cdots n)$，$B(n,p)$，$E(X)=np$，$V(X)=np(1-p)$

⑯ [共面条件] ４点 A,B,C,P が同一平面上 ⇔ $^\exists s,t:\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ←指先の関係

点Pが平面ABC上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$　$\alpha+\beta+\gamma=1$　←指の関係



⑰ $\vec{a},\vec{b}$は平面α上の1次独立なベクトルとして，$\vec{n}\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{a}\wedge\vec{n}\perp\vec{b}$

⑱ $S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

⑲ 二項定理と二項係数$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$（＊）←$x$の恒等式

$x=1,-1$など代入 q など[＊を微分, 積分する]　[複雑化]

期待値の計算で ${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$

$${}_nC_0p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots+{}_nC_nq^n=(p+q)^n$$

とまとめる方向に使うことも重要

⑳ 「一般項は階差の長靴（階比の長靴）」$b_n\overset{def}{=}a_{n+1}-a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$のとき，[難→易]

a_1　a_2　a_3　……　a_{n-1}　a_n　a_{n+1}

b_1　b_2　b_3　……　b_{n-1}　b_n

$$a_n=a_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\quad(n\geq 2)$$

$b_n\overset{def}{=}a_{n+1}\div a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$のとき

「$a_n=a_1\times(b_1\times b_2\times\cdots\times b_{n-1})\quad(n\geq 2)$」

㉑ 一般項は　$a_1=S_1$，$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$

㉒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

㉓ $x=a$で共通接線をもつ$\Leftrightarrow\begin{cases}f(a)=g(a)\\ f'(a)=g'(a)\end{cases}$　円との共通接線は法線が中心を通る

㉔ $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$のとき，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$　はいつどこで使うの

$\tan\theta=t$ のとき

$\cos 2\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin 2\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

で三角関数の有理関数化

① 円$x^2+y^2=r^2\Leftrightarrow\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{r(1-t^2)}{1+t^2}\\ y=\dfrac{2rt}{1+t^2}\end{cases}$　点$(-r,0)$は除く

ピタゴラス数は無限にある

$(1-t^2)^2+(2t)^2=(1+t^2)^2$

② $\displaystyle\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx$の置換積分に$\tan\dfrac{x}{2}=t$とおくと、$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

③ $y=(\tan\theta)x$ に関する線対称変換＝x軸対称の後の回転移動より

$$R(\theta)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}R(-\theta)\ \text{or}\ \begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\ \sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\ \sin2\theta&-\cos2\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1-t^2&2t\\ 2t&t^2-1\end{pmatrix}$$

㉕単純に極限をとる(限りなく近づける)操作をすると一見次の形になってしまう事がある

不定形$\dfrac{0}{0}$　$\dfrac{\infty}{\infty}$　$\infty-\infty$　$0\cdot\infty$　0^0　1^∞　∞^0　は極限が(不定)存在しないのではなく隠れている状態である

㉖　閉区間で連続な関数のリーマン和の極限は定積分の定義そのものと考える

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}=\int_0^1f(x)dx$$

一般調和級数　極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$は，部分和のはさみうちへ

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx<1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^\alpha}<1+\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx$$

□ ㉗ $\int\log x dx = x\log x - x + C$，$\int(\log x)^2 dx = \int x'(\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int 2\log x dx$

$\int\log(x+1)dx = (x+1)\log(x+1)-(x+1)+C$ （部分）

$\int\sin^2 x dx = \int\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+C$，$\int\tan x dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\log|\cos x|+C$ （公式）

$\int x\sin x dx = \int x(-\cos x)'dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$ （部分）

$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi a^2$，$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + C$、$\int\frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + C$

などは超頻出（完全に暗記のこと）

□ ㉘平均値の定理[因数取出し定理] f :微可⇒ $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$，$a<\exists c<b$ [複雑化] [難→易]

積分の平均値の定理[地ならし定理] f :連続⇒$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$，$a<\exists c<b$; [難→易]

□ ㉙極座標変換式 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(x^2+y^2=r^2)$ ←極方程式はこれで（標準）変換

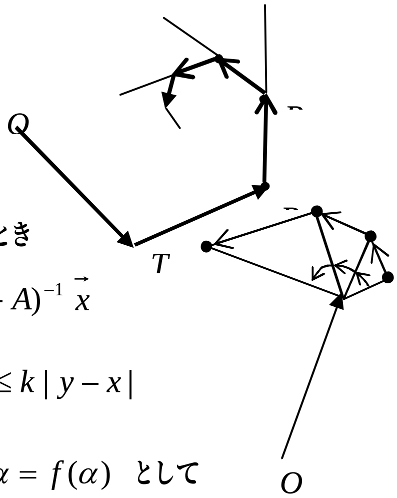
□ ㉚実数 $1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ $(x\neq 1)$

[旧]複素数$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ $(z\neq 1)$ 極形式から三角数列の和を得る

□ 行列 $E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1} = (E-A)^{-1}(E-A^n)$ if $\exists(E-A)^{-1}$

スパイラル点列の極限

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$
$$= \overrightarrow{OT} + E\vec{x} + A\vec{x} + A^2\vec{x} + A^3\vec{x} + \cdots + A^{n-1}\vec{x}$$
$$= \overrightarrow{OT} + (E+A+A^2+A^3+\cdots+A^{n-1})\vec{x}$$
$$= \overrightarrow{OT} + (E-A)^{-1}(E-A^n)\vec{x}$$ ，$(E-A)^{-1}$が存在するとき
$$= \overrightarrow{OT} + (E-A)^{-1}((E-\{\tfrac{1}{2}R(45°)\}^n))\vec{x} \to \overrightarrow{OT} + (E-A)^{-1}\vec{x}$$



□ $f(x)$:縮小写像 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists k(0<k<1): \forall x,y\in R, |f(y)-f(x)|\leq k|y-x|$

○ $a_{n+1} = f(a_n)$ において $f(x)$が微分可能であるとする

リプシッツ条件 $|f'(x)|<k$, $(0<k<1)$ が成り立つとき $\alpha = f(\alpha)$ として

$|f(a_n)-f(\alpha)| = |f'(c)(a_n-\alpha)| = |f'(c)||a_n-\alpha| < k|a_n-\alpha|$

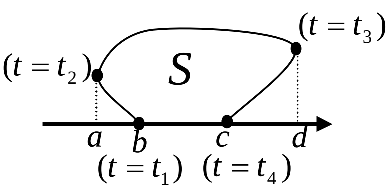
↑平均値の定理より　　　　↑リプシッツ条件より

∴ $|a_{n+1}-\alpha| < k|a_n-\alpha|$ ←縮小写像

これから $0<|a_n-\alpha|<k^{n-1}|a_1-\alpha|$，$0<k<1$より $\lim_{n\to\infty}k^{n-1}|a_1-\alpha| = 0$

はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha| = 0$ よって $\lim_{n\to\infty}a_n = \alpha$ が得られる

媒介変数の積分と「おでこの面積」



$$S = \int_a^d y\,dx - \int_a^b y\,dx - \int_c^d y\,dx$$

$$= \int_{t_2}^{t_3} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{t_2}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{t_4}^{t_3} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{t_2}^{t_3} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{t_3}^{t_4} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_4} y\frac{dx}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_4} g(t)\,f'(t)dt$$

$p(x)$ と $\forall x : p(x)$ と $\exists x : p(x)$ は違う （述語 と 全称命題 と 存在命題）

$\forall x : \exists y : p(x, y)$ と $\exists y, \forall x : p(x, y)$ は違う

$p(x) \to q(x)$ は $\forall x; p(x) \to q(x)$ のことと考える ［質問］ $\exists x; p(x) \to q(x)$ はあるの？

（３）出題される定義（この定義を試す為に問題を作る） 極限で･逆の対応で･その他で定義

①関数 数の集合間の どの元にもただ１つ対応させる規則

連続の定義 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つこと． ξ （クシイ）

微分の定義 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が存在するとき $f'(x)$ と書き，微分可能という

積分の定義 $\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ が存在するとき $\int_a^b f(x)dx$ と書き、積分可能という

関数が[a,b] で連続なら積分可.区分求積法（リーマン和の極限は積分の定義そのもの）として出題される.

②自然対数の底 e の定義 $e \overset{def}{=} \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ $(= 2.718\cdots)$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ と共に極限の基礎 **[複雑化]**

絶妙のバランスでｅに収束する。似ていてもｅとはならない式に注意

③逆行列の定義 $AB = E$ なる BをAの逆行列と定義し，このとき B を A^{-1} とかく

逆の定義より $\Diamond^{-1} = \Box$ の証明は $\Diamond\Box = E$ を示す

⑤ その他 基本的な定義

一般角の三角関数 ベクトルの内積 行列の積 角１(rad) 虚数単位 $i \overset{def}{=} \sqrt{-1}$

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ （$x^3 = 1$ の虚数解の１つ） 円周率π $\overset{def}{=}$ 円周/直径=lim（正ｎ角形での比）

（４）いろいろな観点からのまとめ

0ri.

<☆といえば>① 外接円の半径 R といえば正弦定理，内接円の半径 r といえば $S = sr$

② 滑らか関数の関数値の差 といえば 平均値の定理（因数取り出し定理）

③ 複素数の n 乗 といえば 極形式→ド・モアブルの定理 （旧課程）

行列の n 乗 といえば 次数下げ→ケーリー・ハミルトンの定理

実数の n 乗 といえば $= 10^n$ 対数計算へ

④ 三角関数 といえば まず角をそろえる．次に関数をそろえる

対数 といえば まず真数と底の条件．次に底をそろえる

⑤ 直線 といえば １点と（傾き）方向ベクトル,平面 といえば １点と法線ベクトル

円 といえば 中心と半径，２次曲線 といえば 焦点と準線

⑥ 等差 といえば 初項と公差，等比 といえば 初項と公比

一般項は 階差の長靴（階比の長靴），一般項は n 項の和引く $(n-1)$ 項の和

⑦　**スタイル　といえば　身長と体重，分布　といえば　平均と標準偏差**
分散　といえば　２乗の平均－平均の２乗
⑧　**接線　といえば　接点を押さえる**
⑨　複素数の絶対値の２乗といえば共役との積，実数の絶対値の２乗といえばかっこの２乗
⑩　**平面ベクトルといえば２つ，空間ベクトルといえば３つ　まず基底を用意する**
ベクトルの大きさ　といえば　大きさの２乗→それ自身の内積
ベクトルのなす角　といえば　なす角のコサイン→大きさ×大きさ分の内積
⑪　垂直条件　といえば　内積ゼロ　傾きの積が-1
⑫　積分　　　といえば　部分か置換か公式（変形）か
⑬　**極値の分離問題　といえば　y'のグラフ**
⑭　角の２等分線　　といえば　対辺を２辺の比に分ける・ひし形を作る
⑮　円と接線・直線　といえば　垂直・ピタゴラス
⑯　因数分解　　　　といえば　最低次の文字について整理する
⑰　最短　といえば　垂直，円の中心を通るとき，展開図で直線
⑱　回転　といえば　複素数を掛ける　回転の行列
⑲　**確率　といえば　すべて異なるとみて，同様に確からしい根元事象からなる標本空間**
⑳　幾何・図形問題　といえば　ユークリッドかデカルト座標かベクトルかガウス平面で（に埋め込み考える、次のように座標設定しても一般性を失わない、を基底としてベクトルで考える）複素数平面幾何　といえば　３点幾何の公式
３次元の空間図形　といえば　２次元に帰着させる（$z=k$ など１文字を固定する）

＜☆「春・夏・秋・冬」＞「時刻tにおける位置・速度・加速度ベクトル」距離・速さ・加速度の大きさ・道のり「X の確率分布・平均・分散・標準偏差」，「接線，面積・体積・曲線の長さ」

＜☆２大分類　人間は「男と女」＞不定形の極限は「等式変形と不等式変形（はさみうち論法）」
行列は「正則と非正則」，１次変換は「正則変換と非正則変換」
複素数は「実数と虚数」「iが付く数と付かない数」
関数は「不連続と連続，その中の滑らかなものを微分可能さらに連続な導関数をもつC^1級」

＜☆人名のついた定理は意味も含めた言い方をするのがよい＞
「ピタゴラスの三平方の定理」，「ケーリー・ハミルトンの行列の次数下げ定理」
「ド・モアブルの複素数のn乗定理」，「パップスの中線定理」
類『平均値の定理』は「因数取出し定理」『積分の平均値の定理』は「地ならし定理」

＜☆パターン分類＞「漸化式のパターン分類」，「複素変換のパターン分類」，「積分 Table」
「積分方程式のパターン分類」，「交点ベクトル問題のパターン」
「１次変換のパターン分類」，「異なるもののグループ分け問題のパターン」

＜☆主役をとらえる＞絶対値の定積分→積分変数，群数列→群番号，数学的帰納法→自然数
極限→極限を考えている文字，　シグマ→和を考えている文字

＜☆テーマ＞　「ベクトルの３つの顔と３つのテーマ（交点ベクトル・線形和・計量）」，
「複素数の３つの顔と３つのテーマ（方程式の解・ガウス平面上の点・複素変換作用素）」，
「行列の２つの顔と３つのテーマ（性質・行列方程式・n乗）」

＜☆n乗は難→次数下げ定理＞　三角関数（半角の公式），行列（ｹｰﾘｰ・ﾊﾐﾙﾄﾝの定理），
複素数（ド・モアブルの定理），実数（桁数・最高位の数　10^n の形へ）

＜☆各分野のもっともシンプルな形は本質をつく良い問題＞　$\tan 1°$ は有理数か
二項方程式$z^2=\alpha$，行列方程式$A^2=A$，複素変換$w=\dfrac{1}{z}$，$w=z^2$，極方程式$r=\theta$らせん（アルキメデスの螺旋）
曲線の長さ$y=\dfrac{1}{2}x^2 \quad (0\le x\le 1)$，微分方程式$\dfrac{dx}{dt}=ax \Leftrightarrow x=e^{at}+C$，$\dfrac{dy}{dt}=b \Leftrightarrow y=bt+D$

＜☆ＳＴＡＲＴ，この定義からすべてが始まります＞　級数・微分・積分の定義，行列の積

$i=\sqrt{-1}$，e,π の定義，対数の定義，実数の累乗根，確率の定義　位置・速度・加速度

＜☆近似とはまあこれぐらいでいいかとすること＞

超越数（$e,\pi,\log 2$）の近似，関数値の近似，直線ですます，テイラー展開，
マクローリン展開，大きな数は桁数と最高位の値ですます 10^n の形へ，

＜☆まず＞　まず 角をそろえる，まず 真数と底の条件，まず 最低次の文字で整理，
まず －を外に出す，まず x を外に出す，まず不定形であることを認識する，
まず　必要条件を求め次に十分性のチェックをする（←同値変形が困難なとき）

＜☆はずす＞　絶対値ははずす，シグマははずす，ガウス記号ははずす

＜☆右脳で解く＞　一般項は階差（比）の長靴，一般調和数列と階段図形の面積，
複素数平面と３点幾何，積分 Table，$a_{n+1}=f(a_n)$，ロジスティック関数と周期点

＜☆式を作るところからの問題＞　漸化式（場合の数漸化式，確率漸化式，積分漸化式）を作り解く,媒介変数表示の関数（サイクロイド等）の式を求めグラフ・面積・体積・曲線の長さへ，関数方程式を作りその微分・積分方程式を解く　図形列の面積等の極限や級数

＜☆とは（分かり易く言えば）＞　$p\Rightarrow q$ とは「p ならば例外なく q」、同値とは「表現は違うが内容は同じ」ということ、微分とは「微細な部分」（滑らか関数のグラフは微細な部分は直線），積分とは「分けて積む」「区分して面積を求める方法」（$\Delta S=f(x)\Delta x$），複素数とは数のこと（小学校から習ってきた数はすべて複素数），実数とは i が付かない数，虚数とは i が付く数

＜☆ラクできる公式＞　面積の公式　Wallis の公式　ロピタルの定理　ベクトルの外積
シグマの公式　二項方程式　行列方程式　加重心　複素変換の性質　極線　相関係数

＜☆難→易　の易とは＞①整関数に：はさみうち論法　定積分の近似　テイラー展開
②超越数 $\pi,e,\log 2,\log 3$：近似値③グループ分けの場合の数　ロビー（難）部屋（易）
④ $A\cap B$ の確率（難）を余事象 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$（さらに加法定理へ）
⑤１次（直線）次数下げを行う：直線近似　三角関数の積分　複素数の n 乗　行列の n 乗
⑥微分 置換積分 部分積分　平均値の因数取り出し定理，一般項を階差・階比数列（易）で
⑦負担を減らす：行列のｹｰﾘｰ･ﾊﾐﾙﾄﾝの定理，オメガの性質など０となる固まりを作る
⑧方程式（$=0$）・不等式（$x>0$）の問題：関数のグラフの形状に帰着する（易）

＜☆グラフを描けば見えてくる＞　実数解, 解の分離, 極値の分離→ y' のグラフ，２次高次不等式，分数方程式・不等式，無理方程式・不等式，連立１次方程式，整数解，平衡値・周期点，必要十分

＜☆同じ事の別表現＞①「二項方程式」＝「$z^n=\alpha$」＝「円周等分方程式」＝「n 乗根」，
②単に「条件」とは「必要十分条件」のこと「同値」ともいう．
③ A^{-1} が存在しない $\Leftrightarrow\ \Delta=ad-bc=0\ \Leftrightarrow\ a:c=b:d$ など
④初項とは a_1，一般項とは第ｎ項 a_n のこと

$a_{n+1}=2a_n-1(n=1,2,\cdots)$ と $a_n=2a_{n-1}-1(n=2,3\cdots)$ と $a_{k+1}=2a_k-1(k=1,2,\cdots)$ は
同じ $\{a_n\}$ を定める

⑤部分和　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$　　**級数＝lim(部分和)**

無限和＝無限級数＝級数＝（順序を変えない、カッコで括らない数列の和）

$$S_\infty=a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

⑥平均変化率＝ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

変化率＝lim(平均変化率)＝微分係数

⑦リーマン和＝　Σf(c)Δ　　　　　　　　　　　　$\boxed{\text{定積分=lim（リーマン和）}}$

⑧平均値(average)＝平均（mean）＝期待値（expectation）

＜☆場合分けの境界＞　絶対値｜△｜は△＝0，ガウス記号[△]は△＝整数，$\lim_{n\to\infty}\Delta^n$ は△＝±1

＜顔＞　ベクトルの３つの顔　$\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$

複素数の３つの顔＋１　z，$x+yi$，$r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$re^{i\theta}$

行列の２つの顔　A，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

微積分の３つの顔　$f'(x)$ と $\dfrac{dy}{dx}$ とミックス　←´ダッシュ　とディワイディエックス

数学の本に現れる２つの用語　**日常用語　と　数学用語**　（極限用語）

[あのね]　単位は大切
高橋尚子さんの
体重は？「42.195kg」
π は熱い「$\pi=180°C$」
(度は角の単位だけでなく
温度の単位でもあるが)

＜☆ペアーにして処理する＞　双対性は京大でよく出る

①$(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$　のペアーは $(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$

②$\int e^x\sin x dx$　のペアーは　$\int e^x\cos x dx$

③漸化式で平衡値，特性根が２つあるときは２つとも利用する

④実数係数の n 次方程式は　虚数 $a+bi$　が解なら　共役な $a-bi$ も解

⑤$\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　$\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ はペアーで

⑥　$y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　ゆえに $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\tan^{-1}x \Leftrightarrow x=\tan y$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$　ゆえに　$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore$　$\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C$，　$\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$

⑦　調和級数　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\quad=\infty$

一般調和級数　$1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\cdots=\begin{cases}\alpha\le 1 & \text{発散}\\ \alpha>1 & \text{収束}\end{cases}$

メルカトールの級数　$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\quad=\log 2$

ライプニッツの級数　$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\quad=\dfrac{\pi}{4}$

[考え方]

◇　いずれの級数もコーシーの定義に従い　部分和の極限を考察する

◇　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ は階段図形の面積量をイメージする[はさみうち]

◇　1　2　3　4　5　は $x,x^2,x^3,x^4,\cdots$ 微分の係数をイメージするように $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots$ は

$x,x^2,x^3,x^4,\cdots$ の積分の係数をイメージすることから求めることができる。[医科大で頻出]

＜☆　0になるかたまりを利用　リセットする＞

① 自然数 m,n に対し

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n\end{cases},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n\end{cases},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0$$

この定積分の結果は　$m\neq n$ のとき

$\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\cdots,\cos mx,\cdots$　,　$\sin x,\sin 2x,\sin 3x,\cdots,\sin mx,\cdots$

の中から，勝手に２つ違うものを取り出してかけ合わせ　$-\pi$ から π まで積分すると０になるという。一見不思議な事実を与えている。これが成り立つ理由は２つをかけ合わせたものが、$\cos$ または $\sin$ の和として表され，積分範囲が１周期にわたっているからである。

② $x=1+\sqrt{2}\,i$ のとき $x^2-2x+3=0$　　**きたない数値は出所の式を利用する**

③ $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ のとき C.H.の定理から $A^2-5A-2E=O$

④直和分解(スペクトル分解・射影分解)

$A=\alpha P+\beta Q$，$P+Q=E$　,「$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=O$，$QP=O$」

＜☆条件反射で＞① $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ のとき,

P が三角形ＡＢＣの内部と境界$\Leftrightarrow \alpha+\beta\leq 1,\alpha,\beta\geq 0$

② 極方程式 $r=f(\theta)\Leftrightarrow\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$ 媒介変数表示

＜☆抽象関数の性質と分類＞　抽象関数の性質（中間地の定理・平均値の定理・微分可能なら連続など）の証明は関数とグラフとは直接関係ないのでグラフでもって証明できない

$\{C^1$級$\}\subset\{$微分可能$\}\subset\{$連続$\}\subset\{$積分可能$\}$

・　積分は連続な関数に対して定義　　・連続関数の中間値の定理

・　微分可能な関数の平均値の定理　　・C^1級関数と部分積分，置換積分の公式

＜☆選択ミス･マークミスの人は必ずいます＞　冊子の前から解く人、マークを忘れる･ずれる人　選択ミス

＜☆時々話題にされる大学の内容　どう対応すればいいのでしょうか＞

大学の内容から高校数学に関連する内容を取り出したら

① 極限の定義「$\varepsilon-\delta$ 論法」は「限りなく近づく論法」を厳密に表現したもの（無限を捉えた！）

② テイラーの定理・テイラー展開の意味を正確に、剰余→０になる収束条件が重要

③ 積分の定義「リーマン和の極限」の高校流は？区分求積法として残っている

④ 級数はなかなか厄介なもの「コーシの定義」で決着。部分和の極限と定義

⑤ 関数列は帰納的に扱うレベルのみ。一様収束など大学では扱うが。

⑥ 包絡線と「南京玉簾」・接線群・曲線群の通過領域の問題のパラメーターが３次のとき有効。

＜☆ｈ１８年度　旧帝大で出された受験数学のテーマ＞　解の分離（通過領域　包絡線・極値の分離）のパターン,漸化式のパターン,行列漸化式,ハサミウチ論法,周期点,確率漸化式・場合の数漸化式,数論（京大）,数学的帰納法（阪大）,積分 table（京大 tanx）,立体図形とｚ＝ｋ（多数）,交点ベクトル問題,共通接線　円と放物線,ハサミウチ論法,オーダー，　極限で定義される量，　平均値の定理の使い方，　凸関数の性質，　水の問題（京大）,角の２等分線とひし形（神戸），　積分の定義と区分求積法，　四面体（埋め込み）,有理数である事の証明（背理法）（京大）,存在しない事の証明（フェルマーの定理）数論，　区間で異なる式で与えられる関数（二次元絶対値・絶対値の定積分・ガウス記号）,実数の分類（$e,\pi,\sqrt{2},\tan 1^\circ,\log 2,\cdots$ は有理数？無理数？超越数？）

＜☆セブンイレブンいい気分＞　　数列の最初の授業でのネタ

①　３,(　),（　),１５，１９,・・・・・　　　　　　（答）等差数列

②　１，２，４,（　),（　),１５，２１,・・・・・・（答）階差数列から

③　１，３，４,（　),（　),１８，２９,・・・・・・・（答）フィボナッチ数列

④　２，３，５,（　),（　),１３，１７,・・・・・　（答）素数列

＜☆悪い授業の典型例＞

定理を書いてとにかく厳密に証明を付けて、その定理が何をいっているかも、どうやって応用すればいいかも言わないで先へ進むというもの。定理が何を語っているのかを教える必要がある。さらに、どうしてこの定理が偉大でおもしろいのか、それを感動をもって伝えなければならない。それは、本当に数学が好きな先生に教わらないと駄目であるということである。

＜☆面積は符号付きである＞

平行四辺形の面積 $S=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ （行列式は符号付面積だ）

$S=\int_a^b f(x)dx$ （定積分は符号付面積だ）

＜☆文字の使い方＞未知数と既知数は使い分けること。数字は文字の前、文字はアルファベット順

[数字？文字？] π、e、i は数字と文字の間　　例　２πr

＜☆複名数・単名数・無名数＞

長さ　３m４７cm＝３．４７m　　　時間　２時間３１分＝（２＊６０＋３１）分

角　　１８０度（分、秒）＝πラジアン＝π　（無名数）$\dfrac{[cm]}{[cm]}$

個数　１モル＝$6.02\cdot 10^{23}$ 個　モル個とはいわない, １ダース＝１２個　ダース個とはいわない

[あのね]　水１モル＝１８ｇは　手に盛った水の量として納得理解　コップ１杯（１８０ｃｃ）の水を飲んで「ああ　水１モルおいしかった」

＜☆紛らわしい言葉・用語＞

位置ベクトル　と　距離（位置ベクトルの大きさ）　　角と　角度（角の大きさ）

平行と並行（どこも間隔が等しい線・曲線）　　　　垂直　と　鉛直

＜☆等式の変形＞　与えられた式を自分の必要とする形に直すこと　（英語の書き換え問題）

＜☆立体の表現＞　[三次元→二次元化]　　見取り図　　断面図　　展開図　　投影図

＜☆記号は作られていく＞

底辺ｂ（base）　　高さｈ（height）　半径ｒ（radius）　点Ｐ（point）　長さ l (length)

原点Ｏ（origin）　面積Ｓ(square)　　体積Ｖ(volume)

既知数ａ，ｂ　未知数ｘ，ｙ　＋－

１４８９　ドイツ　ビドマン　√　（　）＝　÷　×　・・・・

＜，　＞１６３１　イギリス　ハリオット

＜☆存在するときの記号＞　極限が存在するとき　$f'(x),\int_a^b f(x)dx,\cdots\cdots$　と書く

それに対し $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は存在に関係なく使われるので混乱のもと、注意

＜☆存在性の定理＞

代数学の基本定理（n 次方程式は複素数の範囲に n 個の解を持つ）

中間値の定理（閉区間で連続な関数の中間値の定理）

平均値の定理（閉区間で連続、開区間微分可能な関数の平均値の定理）

フェルマー･ワイルズの定理（$x^3+y^3=z^3$ の整数解は存在しない）

＜☆とくに基本的な公式と定理は　複雑化して繰り返し出題される＞

＜☆本来の意味をとらえる＞

有理数ではわからん　　rational　number　比数
確率分布表ではわからん　probability　distribution　確率分配＝１の分配
積分とは,区分求積法（リーマン和の極限）

＜☆同値な条件を求めるのに　まず必要条件を求めて十分性のテェックを＞

共通解問題　共通解をαとおき・・・まずそこから得られる条件を求める
関数が極値を持つ条件を必要条件のｆ’＝０として・・・・

＜☆逆行列＞

優等生の鋭い質問シリーズ「逆行列であることの証明は　ＡＢ＝Ｅだけを示せばよいの？。」
Ａ＋Ｂとあれば同じ型　ＡＢ＝ＢＡと書かれてあれば正方行列　ＡＡとあれば　正方行列
ＡＢ＝ＢＡ＝Ｅ　と書かれてあれば正方行列　よって　逆行列が話題になっていれば
正方行列。正方行列において，右逆行列は左逆行列であることが証明できる。
（２次は教科書にある）つまり　ＡＢ＝ＥならばＢＡ＝Ｅ。よって，ＡＢ＝ＢＡ＝Ｅ
よって，逆行列であることの証明は　ＡＢ＝Ｅだけを示せば十分であることになる。

＜☆坊さんとロバ＞

17+1＝１８匹の１／２＝9 匹，１／３＝６匹,１／９＝２匹　和１７匹

＜☆フェルマーの小定理＞

p を素数とするとき、任意の整数 n について $n^p - n$ は p で割り切れる.

p を素数とするとき、任意の整数 n について $n(n^{p-1} - 1)$ は p で割り切れる.

例　0　7
　1　8　　8^7
　2　9　　$2^7, 9^7$
　3　10　　n, n^7
　4　11
　5　12
　6　13

＜☆交換は一般的にできない＞　一般に成り立たない

行列の積　$AB = BA$　，　写像の合成　$f \circ g = g \circ f$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$　　$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$

$\lim \int = \int \lim$　、　$\lim f' = (\lim f)'$　、　$\lim \sum = \sum \lim$

＜☆ゲーデルの完全性定理（completeness　theorem）＞

数学ではいろいろたくさんの概念を定義するのであるが、それを論理的に分析してみると、
$\neg$（否定）　$\wedge$（そして）　$\vee$（または）　$\to$（ならば）　$\forall$（すべての）　$\exists$（存在）
の論理的概念と，今取り扱っている数学的特有な基本的概念　（＝　＜　＋　・・・）の組み合わせでできている。こういう分析による研究は前世紀から徐々に進んできて、今世紀の初めのころに完成されたと思ってよい。（ライプニッツ、ド・モルガン、ペアノ、ラッセル）

この研究の結果、数学の証明というものは、少数の数学的公理から出発して、上述の論理記号についての数少ない簡単な規則を何回も何回もくり返して用いてできたものであることがわかってきた。これは大きな成功であった。

ここで当然の疑問が湧いてくる。この有限個の論理法則のほかに何か別の論理法則がありうるのであろうか？　すなわち　われわれの論理法則は完全であろうか？ゲーデルが次の定理を証明した。

「**われわれの論理は完全である**」

＜正領域･不領域＞

直線lの方程式が $f(x,y)=ax+by+c=0$とする

点P (x_0,y_0)が $f(x,y)$の正領域のとき すなわち $f(x_0,y_0)>0$のとき

点Pと直線lとの距離は $\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ と絶対値をつけずに表すことができる

＜関数とグラフ＞ 「関数＝グラフ」ではない

① 抽象的関数の理論に「グラフより･･」は使えない

② グラフの曖昧さを計算で示せという問題の意図を汲み取る（連続性と微分可能性の問題、交点）

③ 関数 $y=\begin{cases} x:\text{有理数のとき} \\ 0:\text{無理数のとき}\end{cases}$ のグラフは描けない

④ グラフ･図 でははっきりしない事柄を 式でもって説明せよというのが数学である･

特論＜☆こんな間違いしないこと＞

$(kA)^{-1}=kA^{-1}$[誤]
$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$ ［正］

① $\log_a x^2=2\log_a x$ [誤] $\log_a x^2=2\log_a|x|$ [正]

② $|z-\alpha|^2=(z-\alpha)^2$ [誤] ｜｜の2乗は複素数･実数･ベクトルで異なります

③ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ [誤] 行列の積は交換法則が一般に不成立

展開･因数分解の公式は使えません．ただし，相手がEなら$AE=EA$より使えます

行列方程式，ケーリー・ハミルトンの定理など間違いの宝庫

④ $\int\log xdx=\dfrac{1}{x}+C$ [誤] $\int\log xdx=x\log x-x+C$ [正]は暗記しておく

$\int\sin^2 xdx=\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$（誤） $\int\sin^2 xdx=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}+C$ （誤）

$\int\sin^2 xdx=\int\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x)+C$ （正）

どうすればこんなミスをしなくて済むのか。 暗記しかない！

☆cosへの単振動合成の公式もある $a\cos\theta+b\sin\theta=$ $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ [覚え方] ＯＳＯは綱引き または$\sin(\theta+\alpha)=\cos(\theta+\alpha-90°)$ または，左辺を(a,b)と単位円周上の $(\cos\theta,\sin\theta)$の内積と考えれば明白

⑤ $z+\dfrac{1}{z}\geq 2\sqrt{z\cdot\dfrac{1}{z}}$ [誤] $z>0$のときだけ，zが複素数では使え

ません相加･相乗平均の関係は，正の実数に対して成立．

形が同じでも虚数とかでは使えません

⑥ $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin(x-45°)$ [誤] ＳＯＳの公式と覚えます

（正）$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x-(-45°))$

（正） $\cos x-\sin x=-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+135°)=\sqrt{2}\cos(x+135°-90°)$ とすべき

$x\sin x+x\cos x=\sqrt{x^2+x^2}\sin(x+45°)$ [誤] 係数は定数であること

⑦ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ [誤]時々見かけます $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

⑧ 正三角形ＡＢＣで $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos 60°$

[誤] よく見かけます.ベクトルのなす角の

定義は重要です。始点を同じ点にとって計った小さい方の角と定義されていま

⑨ $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ [誤]マイナスが必要です

⑩ $f'(a)=0\Rightarrow f(x)$は$x=a$で極値をもつ [誤]反例あり

aの前後で$f'(x)$が符号変化して$f(x)$は$x=a$で極値をもつ

⑪ $f''(a)=0\Rightarrow f(x)$は$x=a$で変曲点と与える[誤] 反例あり

aの前後で$f''(x)$が符号変化して$f(x)$は$x=a$で変曲点をもつ

こんな誤りも →正解 半経 →半径 徴分 →微分 確立 →確率 体績 →体積 半例 →反例 漸化式・漸近線（ざん）→ぜんかしき・ぜんきんせん 予循 →矛盾 $\dfrac{dy}{dx}$はｄｘ分のｄｙでない →ｄｙｄｘと読む（１つの記号). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\rightarrow\Delta x$分の$\Delta y$（分数） 水1モル個 →水1モル $\pi=180°\rightarrow\pi=3.14\cdots$

$\begin{cases} f'(a)=0 \\ f''(a)>0 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で極小になる。

逆は成り立たない。 反例 $f(x)=x^4$

⑫ 回転体の体積 $V=\pi\int_a^b\{f(x)-g(x)\}^2dx$ [誤], $V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2dx-\int_a^b\pi\{g(x)\}^2dx$ [正]

⑬ $f(x)=g(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)$ ？ 関数関係として $f=g \Leftrightarrow \forall x; f(x)=g(x)$ の時は成立

$x^2=2x$ の両辺を微分して $2x=2$ [誤] x の恒等式なら OK、方程式はダメ、関数関係はない

⑭ $f^{-1}(x)$, $\sin^{-1}\theta$ など関数の逆関数の記法"−1"の上付き添字は，逆数の意味ではないことに注意.

$f(3)=7$ のとき，$f^{-1}(3)=\frac{1}{7}$ は (誤) $f^{-1}(7)=3$ (正)

⑮ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$

⑯ 分散 $V(aX+b)=aV(X)+b$ は (誤)，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ も (誤)

正しくは $V(aX+b)=a^2V(X)$ X,Y が独立の時は $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

⑰ [よくある質問] $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}$ と $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ が混乱して判りません

前者は 数列 $\{\frac{1}{n}\}$ の部分和 S_n (リーマン和でない) で図形的には階段図形の面積量を表すことを利用して その級数の収束・発散ははさみうち論法で議論する

後者は リーマン和とよばれる部分和の1つ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$ でその極限が $\int_0^1 f(x)dx$ であるという**積分の定義**

そのもの $\frac{1}{n}(\frac{1}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{\frac{2}{n}}+\frac{1}{\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{n}})$ はリーマン和であるが，その極限は $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ とはできない (x＝0で連続

でないから) $\frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n})$ はリーマン和であり、その極限は $\int_0^1 xdx$ である。

⑱数学の中で使われる用語は集合の関係から定義されるもの よって 日常用語の意味とは本来異なるものとして注意がいる。数学用語は限られている。かつ (and)，または (or)，でない (not)，任意 (any)、存在する (exist)，ならば (→) 同値 (⇔) ,必要,十分，逆，裏 ,対偶

$A\cap B$, $A\cup B$, $\overline{A}$, $A\subset B$ $A=B$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

[極限用語] 微分 積分 連続 級数 収束 発散 極限 限りなく近づく論法 はさみうち論法

面積、体積、曲線の長さ、部分和，リーマン和 [数学語] と [日常語] とはまったく違う言語と思え

[地球語]：度数法 (360度は地球オリジナル) [宇宙語]宇宙人は弧度法で角度を測っているに違いない。

° (度) を見たらちょっと？と思え。

⑲ 三角比 (鋭角→鈍角→一般角・方向角、度数法と弧度) と 円関数 (余弦関数 正弦関数 正接関数) は 弧度法の一般角でラジアンを付けない時 同一のものとなる。

[教科書]三角比が突然三角関数になります。$\sin\theta$ が突然 $\sin x$ にそれは驚き。マジックの様です。

⑳ [省略] 角の単位ラジアン，行列の積の記号 × ・ など。 [サプライズ] i 虚数 ii 行列の積 iii $\frac{dy}{dx}$ iv 部分和の極限 [微積分の 2 大理論分野] 平均値の定理 と リーマン和の極限

21 級数の定義 (部分和の極限) に従わない 無限和の誤答例

(21) 質問 帰納法の証明$[P(k)\Rightarrow P(k+1)]$の証明部分で

$n=k$のとき成り立つと仮定すると $P(k)$が成り立つ

よって $\boxed{k\text{を}k+1\text{に替えて}}$ $P(k+1)$が成り立つ この論法の間違いは？どこにあるのですか。

[答え] ①「$k\in N$；$P(k)$が成り立つ」 と ②「$\forall k\in N; P(k)$が成り立つ」 とはまったく違う

①はkのときに成り立つといっているに過ぎず ②はk（の部分）がどんな値であっても成り立つといっているのである。

□尚 ③$[P(k)\Rightarrow P(k+1)]$は論理学上 $\forall k\in N; [P(k)\Rightarrow P(k+1)]$のことであるとされる

□①命題 ②全称命題 ③⇒の条件 ③に於ける$P(k)$は仮定である

＜各分野の基本中の基本 キーとなるワード＞

・極限とは限りなく近ずく先？ ・行列の世界ヨコたてヨコたての積の変な世界
・無理数の証明 比数と仮定すると矛盾を示す ・級数とは決して順序を変えずカッコも付けない数列の和のこと ・極限の BIG3 と解析学 級数＝lim部分和 微分＝lim平均変化率 定積分＝lim連続関数のリーマン和 ・積分は部分か置換か公式か 積分漸化式は部分で、周期性のある公式は置換で ・関数のグラフはyで描く y'はその後で使う ・完全性定理
論理は∧and ∨or ¬not →if then 任意 any 存在 exist で完全 ・素数、互いに素の理解と納得餃子と蝉 ・否定的命題の証明は背理法が有効（一次独立・非正則・無理数） ・くもの巣と周期点 ・数学的帰納法の原理いろいろ
・不等式と極限ときたらハサミウチ ・関数値の差は平均値の定理 ・正の数とその逆数の和は相加・相乗平均 ・6＊6表とじゃんけん ・63公式 ・解の分離問題判と軸と端

- 南京玉簾と曲線群の通過領域の問題 ・時系列の問題 ・確率漸化式と対称性 nとn＋1の関係の図を（幾何学も）
- ・n次の接触 2次の接触 $f(x)-g(x)=(x-a)^2$を因数に持つ

＜☆センター標準出題パターン☆＞ [知ッ得][超重要][新課程][花プリ]

数学Ⅰ・A（60分） 全問必答

〔1〕２次方程式・不等式(20) 解の分離問題，整数解問題，共通解問題
〔2〕２次関数(20)
文字係数，頂点,平行移動,区間での最大最小,グラフの形状問題，***切り取る弦の長さ***

〔1〕三角形(20)
円に内接する四角形
Rと正弦定理，余弦定理，面積公式，r，中線，角の２等分線
〔2〕確率(20)さいころ２個３個，異なるとみる組合せ順列の確率，点の移動， ***期待値***

論証と平面図形(20)
1．整式の乗除・式の値
2．必要十分
「任意」と「ある」の問題
平面図形 三角形の五心・角の二等分線・接弦・メネラウス・チェバ・方ベキの定理
同一円周上条件

数学Ⅱ・B（60分） 数学Ⅱ２問必答 ← 数学Ｂから２問選択 →

関数（30）
〔1〕三角関数
単振動合成、角を揃える・次数下げ公式
〔2〕指数対数関数
指数対数方程式・不等式
解の個数問題

図形と微積(30)
接線・共通接線，円，放物線で囲まれた部分の面積 最大・最小
絶対値の積分
極値の分離問題
軌跡・通過領域

ベクトル
(20)空間図形***四面体***の計量（長さ，角）最短，垂直 交点ベクトル問題，線形和問題

数列(20)
等差と等比の公式
等差＊等比型の和
群数列
漸化式で定める数列

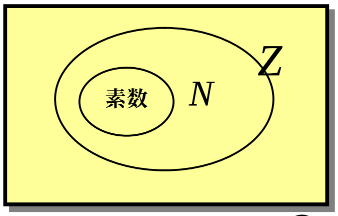
資料の整理(20)
メジアン
モード
平均
分散
標準偏差
相関係数

アルゴリズム(20)

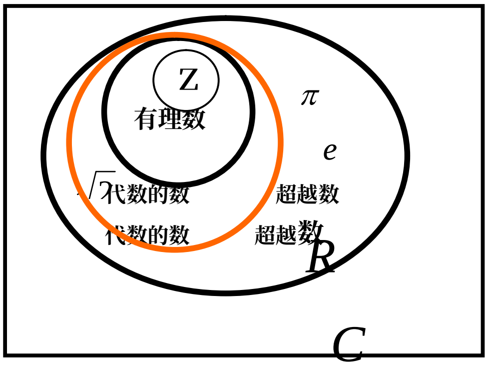
＜☆数の分類＞

数	自然数	整数	有理数＝比数	実数	複素数
分布	数直線				複素数平面
	離散（ばらばら）		稠密（隙間なし）	連続 ビッシリ	ビッシリ
閉じた演算	＋×	＋×－	四則演算に関し閉じている	四則演算 累乗根	四則演算 累乗根

「万物は数(自然数)から成る」ピタゴラス
有理数（整数の比で表される数）は
四則演算に関し閉じ・数直線上に隙間なしに存在する。だから数直線上は有理数で超満員である。と考えた。

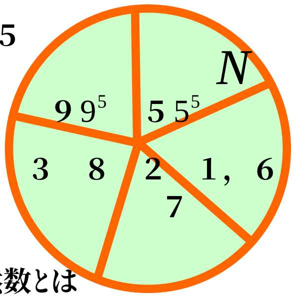


比数だけで超満員状態？の数直線。



フェルマーの小定理　無限人学級のクラスの掃除担当表（素数班）

p＝5



$n^p \equiv n \pmod p$

p＝7のとき「2、9、16，23、30、・・，$2^7, 9^7, \cdots, 30^7$

は　すべて同一曜日」

◆ 自然数とは
○ ,○○ ,○○○ ,○○○○ ,○○○○○ ,○○○○○○ ,○○○○○○○ ,○○○○○○○○ 、・・・

◆ 自然数の分類　1 と 素数 と 合成数（重ねることができずに横一列になるのが素数）

○　○○　○○○　○○/○○　○○○○○　○○○/○○○　○○○○○○○　○○○○/○○○○　○○○/○○○/○○○　○○○○○/○○○○○

元素が物質を作る素であるように，素数が整数を作る素

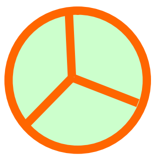
［Th. ］　素数は無限にある　（すべての素数を見つけよう）$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$は素数

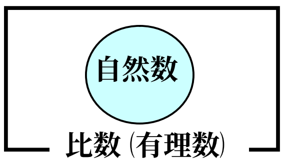
[あのね]素数体験　*餃子1人前は7個が多い　2人3人・・・6人で分けられません*

互いに素　137年ぜみが大発生

◆ 自然数の分類　剰余類で (無限→有限)　[難→易]
自然数に関する証明に有効

(ア) $n = 3k$　のとき
(イ) $n = 3k+1$　のとき
(ウ) $n = 3k+2$　のとき





◆ n進法による表示　$abc.def_{(7)} = a\cdot 7^2 + b\cdot 7^1 + c\cdot 7^0 + d\cdot 7^{-1} + e\cdot 7^{-2} + f\cdot 7^{-3}$

10進法　2進法　16進法・・・・

◆ 有理数←比数のこと　　「万物は数(自然数)である」ピタゴラス

[Def]定義　有理数とは，適当な整数m,n（ただし、$m\neq 0$）を用いて　$\frac{n}{m}$　と表せる数のこと。

[Def]定義　無理数とは，有理数ではない実数　←否定的に定義される

問題 $\pi, e, \sqrt{2}, \log_2 3, \tan 1^\circ \cdots$ は有理数か（比数か。）

$$\triangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{正n角形の周の長さ}}{\text{外接円の直径の長さ}} \ ,\ \triangle = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \ , \Delta^2 = 2 \ ,\ 2^{\Delta} = 3$$

これらは　$\Delta = \frac{n}{m}$（整数m,n）（ただし、$m\neq 0$）とは両立し得ない

例えば　$m,n\in N; \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \ \Rightarrow n^2 = 2m^2 \ \Rightarrow$ ？ $\Rightarrow$ 矛盾

$2^{(\frac{n}{m})} = 3 \ \Rightarrow \ 2^n = 3^m \ \Rightarrow$ 矛盾,

$\tan 1^\circ = \frac{n}{m} \ \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \ \Rightarrow$ 矛盾　　（京大 H16）

が示されれば，$\sqrt{2}, \log_2 3, \tan 1^\circ$，は有理数ではないことが証明されたことになる。

◆　数の世界の異端児集団「注意人物」

０：足しても変えない　　０での除法は除く

１：掛けても変えない　　素数の外れもの

e：微分しても変えない　無限 1+1/1!+1/2!+••••••

π：最初の超越数　　　　無限 1-1/3+1/5-1/7+••••••

i：想像的な数　　　　大小がない

これらの個性の強い数が見事な整然とした関係を作っている

$e^{i\pi}+1=0$　，無限の無限乗＝－１　数学は“神”が創った　だから

定理を発明と言わずに発見という。e^x は微積分のフェニックス　[e^x ＝はばタン]

◇　有理化は有利か　桁落ち　1/√4.001　+2　＝1000*(√4.001-2)

0.2499843　　　　0.2499　　　精度を下げってしまうこともある

<同値変形によりスッキリ理解できる問題>

すべてを同値性にもとづいて答案を作成することは難しいかもしれない。

しかしそうすることで、はじめてはっきりと理解できる。数学は同値性の学問である。

◇行列方程式をケーリー・ハミルトンの定理で次数下げし　１次の方程式に帰着

例１　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき（前提条件）

トレース　$a+d=3$　かつ　行列式 $ad-bc=2$　$\Rightarrow$　$A^2-3A+2E=O$

解　（⇒）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，C．H．の定理より $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

よって，$a+d=3, ad-bc=5$　を代入して　$A^2-3A+5E=O$　を得る．

（⇐は偽）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき

「$A^2-3A+2E=O$　⇒（ならば例外なく）$a+d=3$ かつ $ad-bc=2$」は偽

反例　$a=2, b=0, c=0, d=2$ のときつまり $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2E$ 　は

$A^2-3A+2E=O$ を満たすが　$a+d=4, ad-bc=4$

例２　２次の行列方程式　$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ のとき、$A^2-3A+2E=O$ を解け

2次の行列方程式が C.H.の次数下げ定理によって同値な1次の行列方程式に帰着された
特に $\Leftarrow$ の確認を
①かつ②⇔①かつ③

１次に次数下げ　同値な１次の行列方程式に帰着する

解 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ のとき　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ①　だから

$A^2-3A+2E=O$ ② $\Leftrightarrow (a+d)A-(ad-bc)E=3A-2E$ ③・・＊

$\Leftrightarrow \quad (a+d-3)A-(ad-bc-2)E=O$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+d=3\\ ad-bc=0\end{cases}$ または $A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}E$ （$a+d\neq 3$）

$pA+qE=O$
ｉ) $p=q=0$ A は任意
$p=0, q\neq 0$ 解なし
ⅱ) $p\neq 0; A=-\dfrac{q}{p}E$

1次の行列方程式を
トレースが0となるものとならないもので場合分けして解く

よって　ｉ）$\begin{cases}a+d=3\\ ad-bc=0\end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

または　ⅱ）$A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}E$ なる $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$　ただし　$a+d-3\neq 0$

ｉ）から　$a=t, b=s$ とおくと $A=\begin{pmatrix}t & s\\ \dfrac{t(3-t)}{s} & 3-t\end{pmatrix}$ （t, s は任意の実数）

行列の成分を求めるのだから、2つの文字 s,t で表現した。

ⅱ）から　$A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ より

$A=kE$ の形（必要条件）として
$A^2-3A+2E=O$ に代入しk
を確定する解答例が多いが

$$\begin{cases}b=0\\ c=0\\ \dfrac{ad-2}{a+d-3}=a & \therefore a^2-3a+2=0\\ \dfrac{ad-2}{a+d-3}=d & \therefore d^2-3d+3=0\end{cases}$$

$a+d-3\neq 0$，　$a=1,2$　$d=1,2$　より　$(a,d)=(1,1),(2,2)$

ｉ)ⅱ）まとめて　$A=\begin{pmatrix}t & s\\ \dfrac{t(3-t)}{s} & 3-t\end{pmatrix}$ （t, s は任意の実数）、$A=E, 2E$　・・・(答)

別解

(誤) A：2次の正方行列，$p, q, p', q'\in R$ のとき
$pA+qE=p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

(正) A：2次の正方行列　$A\neq kE$，$p, q, p', q'\in R$ のとき
$pA+qE=p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

(誤) A：2次の正方行列　$p, q, p', q'\in R$ のとき
$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

求める解を $A=kE$ のものと　それ以外のものとで分けて求めることにする

ア) $A=kE$ の形の解を求める　　　　$\boxed{A=kE\text{ の形のものをまず求める}}$

$A=kE$ のもとで

$A^2-3A+2E=O \Leftrightarrow (kE)^2-3kE+2E=O \Leftrightarrow (k^2-3k+2)E=O \Leftrightarrow k^2-3k+2=0$

$\Leftrightarrow k=1,2$

ゆえに　$A=E,2E$

イ) $A\neq kE$ のときの解を求める　　　　$\boxed{\text{何次であろうと1次まで落とす}}$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると C.H.の定理より　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$　①

①のもとで

$A^2-3A+2E=O$ ②　$\Leftrightarrow$　$A^2-3A+2E=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$ ③

$\Leftrightarrow$　$-3A+2E=-(a+d)A+(ad-bc)E$

$A\neq kE$ のときは　さらに $\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=0 \end{cases}$ と同値

ゆえに $\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=0 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(ア) (イ) 合わせて

すべての解は　$A=E,2E$　と　$\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=0 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

例3 漸化式 $a_{n+1}=a_n{}^2-a_n$　$(n=1,2,\cdots)$ とは

(各項) = (直前の項) ^{2} ― (直前の項) で　無限に続く連立等式のこと

つまり $\begin{cases} a_2=a_1{}^2-a_1 \\ a_3=a_2{}^2-a_2 \\ a_4=a_3{}^2-a_3 \\ a_5=a_4{}^2-a_4 \\ \quad\vdots \end{cases}$ を意味し、その表現方法はいろいろある。

$\Leftrightarrow$　$a_n=a_{n-1}{}^2-a_{n-1}$　$(n=2,3\cdots)$　と書かれても同じ

$a_1=2, a_2=5,\ a_{n+1}=a_n{}^2-a_n$　$(n=2,3,4,\cdots)$　$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_3=a_2{}^2-a_2 \\ a_4=a_3{}^2-a_3 \\ \quad\vdots \end{cases}$

□漸化式の　$(n=1,2,3,4,\cdots)$ の部分はとても大切

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ $(n=1,2,3,4,\cdots)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=2a_1+1 \\ a_3=2a_2+1 \\ \quad\vdots \end{cases}$

$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+1$　$(n=2,3,4,\cdots)$　$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=2a_1+1 \\ a_3=2a_2+1 \\ \quad\vdots \end{cases}$

□ $P(n)$ を自然数nに関する条件命題とする
$P(n)$ がすべての自然数nについて成り立つことの証明

数学的帰納法の原理　$P(n)$　$(n=2,3,4,\cdots)$　つまり　$P(2),P(3),P(4),\cdots$　　の証明法

①$P(2)$，$[P(k)\Rightarrow P(k+1)]$$(k=2,3,4,\cdots)$ $\Rightarrow$　$P(2),P(3),P(4),\cdots$

②$P(2)$，$P(3)$，$[P(k)\Rightarrow P(k+1)]$$(k=3,4,\cdots)$ $\Rightarrow$　$P(2),P(3),P(4),\cdots$

③$P(2)$，$P(3)$，$[P(k),P(k+1)\Rightarrow P(k+2)]$$(k=2,3,4,\cdots)$ $\Rightarrow$　$P(2),P(3),P(4),\cdots$

④$P(2)$，$P(3)$，$[P(k)\Rightarrow P(k+2)]$$(k=2,3,4,\cdots)$ $\Rightarrow$　$P(2),P(3),P(4),\cdots$

　など、柔軟に考えること。

（特に漸化式が与えられた時の帰納法による証明は　漸化式のタイプに依る）

$\boxed{\text{注意}}$$[P(k)\Rightarrow P(k+1)]$の証明部分を　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると　$P(k)$ が成り立つ

よって　k を $k+1$ に替えて $P(k+1)$ が成り立つ　この論法の間違いは？どこにあるのですか。

[答え]　「$k\in N$；$P(k)$ が成り立つ」　と　「$\forall k\in N;P(k)$ が成り立つ」　とはまったく違う

「$k\in N$；$P(k)$ が成り立つ」から「$P(k+1)$ が成り立つ」は即いえない

数学的帰納法とドミノ

｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜

｜｜　｜　｜　｜　｜　｜　｜

□　$\forall x\in R;$「$x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1$」のことを「$x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1$」としてしまう

$\forall x\in R;$「$x=1\Rightarrow x^2-3x+2=0$」のことを「$x=1\Rightarrow x^2-3x+2=0$」としてしまう

$\forall x\in R;$「$p(x)\Rightarrow q(x)$」が真　と　$\{x\mid p(x)\}\subset\{x\mid q(x)\}$　は同値

□　$y'=y$　、　$y''=y$　の解

＜安易な係数比較にご用心＞

①多項式の係数比較

（正）$p,q,r,p',q',r'\in R$

すべての x で $px^2+qx+r=p'x^2+q'x+r'$　$\Rightarrow$　$p=p'$　$\wedge$　$q=q'$　$\wedge$　$r=r'$

（x の恒等式）

②分数式の係数比較

（誤）$p,q,r,s,p',q',r',s'\in R$　$rx+s\neq 0,r'x+s'\neq 0,$ なるすべての x で

$$\frac{px+q}{rx+s}=\frac{p'x+q'}{r'x+s'}\qquad\Rightarrow\quad p=p'\quad\wedge\quad q=q'\quad\wedge\quad r=r'\quad\wedge\quad s=s'$$

$\Rightarrow$　（正）　係数の比が等しい　$\dfrac{p}{p'}=\dfrac{q}{q'}=\dfrac{r}{r'}=\dfrac{s}{s'}$

③無理数と係数比較

（正）α を無理数　$p,q,p',q'\in Q$（有理数）　とする

$$p\alpha+q=p'\alpha+q'\Rightarrow p=p'\quad\wedge\quad q=q'$$

（誤）α を無理数　$p,q,r,p',q',r'\in Q$（有理数）　とする

$$p\alpha^2+q\alpha+r=p'\alpha^2+q'\alpha+r'\Rightarrow p=p'\quad\wedge\quad q=q'\quad\wedge\quad r=r'$$

④ベクトルと係数比較

（誤）　2つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$　，$s,t,s',t'\in R$　について

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \quad \Rightarrow s=s' \quad \wedge \quad t=t'$

(正しくは　ベクトルが一次独立のときに成り立つ)

(正) 2つの$\vec{0}$ではないベクトル$\vec{a},\vec{b}$が平行でないとき，$s,t,s',t'\in R$　について

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \quad \Rightarrow s=s' \quad \wedge \quad t=t'$

(ベクトルが一次独立のとき)

(正) 3つの$\vec{0}$ではないベクトル$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$がそれぞれ始点を一致させたとき同一平面上にないとき，

$s,t,u,s',t',u'\in R$　について

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \quad \Rightarrow s=s' \quad \wedge \quad t=t' \quad \wedge \quad u=u'$

⑤行列と係数比較

(誤) A：2次の正方行列，$p,q,p',q'\in R$のとき

$pA+qE=p'A+q'E \quad \Rightarrow \quad p=p' \quad \wedge \quad q=q'$

(正) A：2次の正方行列　$A\neq kE$，$p,q,p',q'\in R$のとき

$pA+qE=p'A+q'E \quad \Rightarrow \quad p=p' \quad \wedge \quad q=q'$

(誤) A：2次の正方行列　$p,q,p',q'\in R$のとき

$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E \quad \Rightarrow \quad p=p' \quad \wedge \quad q=q'$

⑥1次変換の性質

(誤)　$A\vec{x}=\vec{x} \quad \Rightarrow \quad A=E$

(誤)　$A\vec{x}=\vec{x} \quad (\vec{x}\neq\vec{0}) \quad \Rightarrow \quad A=E$

(正)　$A\vec{x}=\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A-E)\vec{x}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad ???$

(正)　$A\vec{x}=\vec{x}\wedge A\vec{y}=\vec{y}\Rightarrow A(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\vec{y}) \quad (\vec{x},\vec{y})^{-1}$が存在するときは　$A=E$

(正)　$AB=B\wedge(\exists B^{-1})\Rightarrow A=E$

[類]

(誤)　$k\vec{x}=\vec{x} \quad \Rightarrow \quad k=1$

(正) $k\vec{x}=\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)\vec{x}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k=1$または$\vec{x}=\vec{0}$

(誤)　$\sin\alpha=\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta$

(正)　$\log\alpha=\log\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta$

＜行列の分類＞

①正則と非正則　、　② $A=kE$ か $A\neq kE$　、③ $pA=qE$ に対し $p\neq 0$ か $p=0$

＜２変数関数の最大最小＞

□　１変数固定方式　と　ノミネート方式（予選決勝方式）

＜数方程式とベクトル方程式　行列方程式の相違＞

行列と係数比較

(誤) A：2次の正方行列，$p,q,p',q'\in R$のとき

$pA+qE=p'A+q'E \quad \Rightarrow \quad p=p' \quad \wedge \quad q=q'$

(正) A：2次の正方行列　$A\neq kE$，$p,q,p',q'\in R$のとき

$pA+qE=p'A+q'E \quad \Rightarrow \quad p=p' \quad \wedge \quad q=q'$

(誤) A：2次の正方行列　$p,q,p',q'\in R$のとき

$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E \quad \Rightarrow \quad p=p' \quad \wedge \quad q=q'$

1次変換の性質

(誤) $A\vec{x}=\vec{x} \quad \Rightarrow \quad A=E$

(誤) $A\vec{x}=\vec{x} \quad (\vec{x}\neq\vec{0}) \quad \Rightarrow \quad A=E$

(正) $A\vec{x}=\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A-E)\vec{x}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow$ ？？？

(正) $A\vec{x}=\vec{x} \ \wedge \ A\vec{y}=\vec{y} \quad \Rightarrow A(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\vec{y}) \quad (\vec{x},\vec{y})^{-1}$が存在するときは　$A=E$

(正) $AB=B\wedge(\exists B^{-1})\Rightarrow A=E$

[類]（誤）$k\vec{x}=\vec{x} \quad \Rightarrow \quad k=1$

（正）$k\vec{x}=\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)\vec{x}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k=1$ **または** $\vec{x}=\vec{0}$

（正）$kA=O \quad \Leftrightarrow \quad k=0$ **または** $A=O$

◇$aX=bE$　**と**　$ax=b$

ア）$a\neq 0$ **のとき** $X=\dfrac{b}{a}E$

イ）$a=0$ **のとき**　$0X=bE \quad b=0 \quad X$

$ax=b$

ア）$a\neq 0$ **のとき** $x=\dfrac{b}{a}$

イ）$a=0$ **のとき**　$0x=b \quad b=0 \quad x$

◇$X^2+aX+bE=O$

$x^2+ax+b=0 \quad (x-p)(x-q)=0 \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

◇$X^2-3X+2E=O \quad \Leftrightarrow \quad (X-E)(X-2E)=O \quad \Leftarrow \quad X=E,2E$

$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow x-1=0,x-2=0\Leftrightarrow x=1,2$

◇$X^2-2X+E=O \quad \Leftrightarrow \quad (X-E)^2=O \quad \Leftarrow \quad X=E$

$x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$

◇$X^2+X+E=O$

$x^2+x+1=0\Leftrightarrow x=\omega,\omega^2$

◇$X^3-E=O \quad \Leftrightarrow(X-E)(X^2+X+E)=O$

$x^3-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+1)=0\Leftrightarrow x=1,\omega,\omega^2$

＜チェビシェフの不等式＞　①　$a\geq b, x\geq y$のとき, $\dfrac{ax+by}{2}\geq\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{x+y}{2}$

②$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n, x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$のとき, $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\geq\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

＜下に凸関数＞

◇**[定義]** fを区間で定義された関数とする。$x_1<x_2<x_3$であるような任意の3点に対し

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

◆**[定理]** fを下に凸関数　⇔　区間内の任意の2点x_1,x_2と$0\leq\alpha\leq 1$なる任意のαに対し

$f((1-\alpha)x_1+\alpha x_2)\leq(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2)$が成立する

◆　$f''(x)>0$ **ならば　下に凸**

＜数学の答案作成の1つの型　参考＞

① 題意の**定式化**，数学は同値性の学問とにかく同値変形でよりやさしい式・世界に1歩1歩近づけるだけの事。いろいろな同値な変形の中で利用できる姿を探す。計算ミスは絶対にしない。

②場合分けの見出しは必ず付ける。説明のない式の羅列だけの答案は論外。等号にも　変形なのか　方程式なのか　恒等式か　定義か　それだけでは判らないまた　文字も定数か変数か　自然数、整数、実数・・かを明確にする。

③図とグラフと計算を絡めた試行を行う。図式化しようとするが限界を感じたらすぐに切り替える。いつまでも一つの方法に拘らないで水平思考。

④抽象概念は具体化して試行し法則を見抜く。N=3　p＝5として考えてから一般の N,P で　以外に簡単　しかし抽象概念は図で片付けない。

⑤解ける問題を解く。解けない問題はパスする。

⑥必要十分を意識した答案づくりを行う。つまり、6つの論理記号（Any, Exist, And,Or,Not,⇒）を意識した展開をする．任意と存在には特に注意。

⑦ドラゴン桜方式で解答用紙を使う。2分割し上から下への推論の流れを作る。行間をあけることで見やすく答よりも**考え方**を採点するので注意を。

⑧ 問題文にあるすべての条件が使われていなければならない。

⑨（1）番ねらい　**解けたら×印をいれて　リズムをつかむ**

図1

（1）

・・・（答）

（2）　重要な項目・式には番号を付ける

⇔

⇔

⇔

・・・・（＊）

・・・・①　　　　　・・・・②

・・・・③

①かつ②　⇔　①かつ③

任意　　存在　　かつ　または

以下を示せばよい。の問題に帰着される。

・・・・は・・・・・と同値である。

背理法で示す

有理数と仮定すると矛盾することを以下に示す

Xの確率分布表は

よって X の期待値は

（ｉ）（⇒）の証明

・・・・・・・・・・・・・・・・・

（ii）（⇐）の証明

・・・・・・・・・・・・・・・・・

よって　同値（必要十分）である

必要条件として・・・逆に十分性を示す

対偶で証明する。・・・・・よってもとの命題は真である。

図形（問題）の対称性より　・・同様にして

（ア）　・・・のとき

（イ）　・・・のとき

（ア）（イ）まとめて

（ｉ）

（ii）

（iii）

（iv）

まとめて

これは自然数に関する命題だから　数学的帰納法で証明する

（Ｉ）n=1 のとき　成り立つ

つまり　　　　　を証明する

/　　・・・・　　　　よって成り立つ/

（II）任意の自然数 k に対し

n＝kのとき成り立つ

つまり　　　　　・・・①を仮定すると

n=k+1 のとき成り立つ

つまり　　　　　・・・②が成り立つ

ことを以下証明する。

/・・・・・・・（漸化式より）

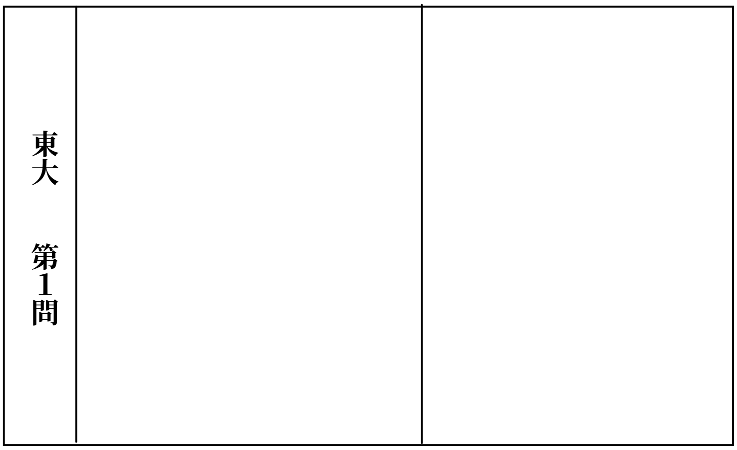
①より

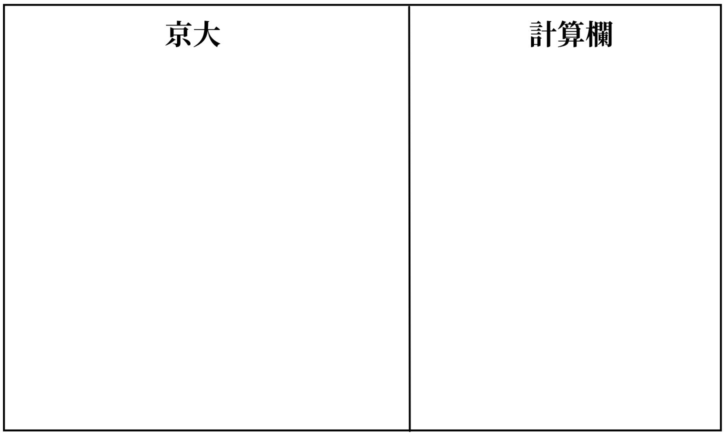
・・・・・・・・・

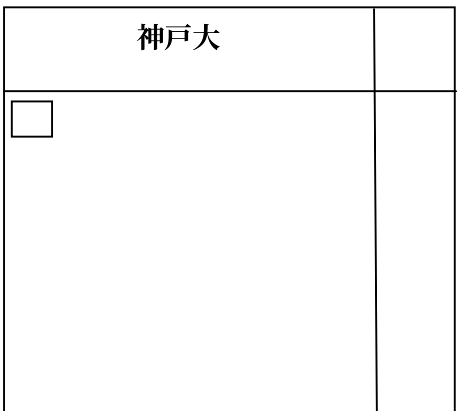
よって②は成り立つ/

（Ｉ）（II）より数学的帰納法により証明された。

実践ノートは A4 版の無地で、一問見開きで解答するようにする。
解答用紙は志望大学の様式を使いその気になれ。







A4無地ノート(見開き)