行列方程式

◇行列方程式をケーリー･ハミルトンの定理で次数下げし　1次の方程式に帰着

> $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき（前提条件）
>
> トレース　$a+d=3$　かつ　行列式 $ad-bc=2$　$\Rightarrow$　$A^2-3A+2E=O$

$\boxed{\text{解}}$　（$\Rightarrow$）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,C. H.の定理より $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

よって，$a+d=3, ad-bc=5$　を代入して　$A^2-3A+5E=O$　を得る.

（$\Leftarrow$ は偽）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき「$A^2-3A+2E=O$　$\Rightarrow$（ならば例外なく）$a+d=3$ かつ $ad-bc=2$」は偽

$\boxed{\text{反例}}$　$a=2, b=0, c=0, d=2$ のときつまり $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2E$　は

$A^2-3A+2E=O$　を満たすが　$a+d=4, ad-bc=4$

> 2 次の行列方程式　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、$A^2-3A+2E=O$ を解け

2 次の行列方程式が C.H.の次数下げ定理によって同値な1次の行列方程式に帰着された　特に $\Leftarrow$ の確認を
①かつ②⇔①かつ③

$\boxed{\text{解1}}$　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ①　だから

$A^2-3A+2E=O$ ②　$\Leftrightarrow$　$(a+d)A-(ad-bc)E=3A-2E$ ③

1次に次数下げ　同値な1次の行列方程式に帰着する

$\Leftrightarrow$　$(a+d-3)A-(ad-bc-2)E=O$

> $pA+qE=O$
>
> i）$p=q=0$　A は任意
>
> ii）$p=0, q\neq 0$　解なし
>
> iii）$p\neq 0$;　$A=-\dfrac{q}{p}E$

$\Leftrightarrow$　$\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=2 \end{cases}$　または $A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}E$（$a+d\neq 3$）

よって　i）$\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=2 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1次の行列方程式を
トレースが0となるものとならないもので場合分けして解く

または　ii）$A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}E$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　ただし　$a+d-3\neq 0$

i）から　$a=t, b=s$ とおくと $A=\begin{pmatrix} t & s \\ \dfrac{t(3-t)}{s} & 3-t \end{pmatrix}$（$t, s$ は任意の実数）

行列の成分を求めるのだから、2つの文字 s,t で表現

ii）から　$A=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ \dfrac{ad-2}{a+d-3}=a & \therefore\ a^2-3a+2=0 \\ \dfrac{ad-2}{a+d-3}=d & \therefore\ d^2-3d+3=0 \end{cases}$$

$A=kE$ の形（必要条件）として
$A^2-3A+2E=O$ に代入し k
を確定する解答例が多い

$a+d-3\neq 0$,　$a=1,2$　$d=1,2$　より　$(a,d)=(1,1),(2,2)$

i）ii）まとめて　$A=\begin{pmatrix} t & s \\ \dfrac{t(3-t)}{s} & 3-t \end{pmatrix}$（$t, s$ は任意の実数）、$A=E, 2E$　･･･（答）

$\boxed{解2}$

[行列と係数比較]
(誤) A：2次の正方行列 , $p,q,p',q' \in R$ のとき
$pA+qE=p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$
(正) A：2次の正方行列 $A \neq kE$, $p,q,p',q' \in R$ のとき
$pA+qE=p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$
(誤) A：2次の正方行列 $p,q,p',q' \in R$ のとき
$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

ア) $A=kE$ の形の解を求める

$\boxed{\textit{求める解を}A=kE\textit{ のものと　それ以外のものとで分けて求めることにする}}$

$A=kE$ のもとで

$$A^2-3A+2E=O \Leftrightarrow (kE)^2-3kE+2E=O \Leftrightarrow (k^2-3k+2)E=O \Leftrightarrow k^2-3k+2=0$$

$$\Leftrightarrow k=1,2 \quad \Leftrightarrow \quad A=E,2E$$

イ) $A \neq kE$ のときの解を求める　$\boxed{\text{何次であろうと1次まで落とす}}$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ すると C.H.の定理より　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ①

① のもとで

$$A^2-3A+2E=O \text{②} \quad \Leftrightarrow \quad A^2-3A+2E=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E \text{③}$$

$$\Leftrightarrow \quad -3A+2E=-(a+d)A+(ad-bc)E$$

$A \neq kE$ のときは さらに $\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=2 \end{cases}$ と同値

(ア)(イ) 合わせて すべての解は　$A=E,2E$　と　$\begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=2 \end{cases}$ なる $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\boxed{解3}$ $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと　$X^2=E$ の解は

成分で　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 & \text{①} \\ (a+d)b=0 & \text{②} \\ (a+d)c=0 & \text{③} \\ bc+d^2=1 & \text{④} \end{cases}$

②③からア．$a+d=0$ のとき②③は満たされ，①④から $ad-bc=-1$

イ．$a+d \neq 0$ のとき②③から $b=0,c=0$ さらに①④から $a=\pm1,d=\pm1$（複号同順）

ア．イから

そこで　$A^2-3A+2E=O \quad \Leftrightarrow \quad (A-\frac{3}{2}E)^2=\frac{1}{4}E$　だから　$(2A-3E)^2=E$

$2A-3E=E,-E$　または $2A-3E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a+d=0,ad-bc=-1)$

ゆえに　$A=E,2E,\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+3 & b \\ c & d+3 \end{pmatrix}$ $(a+d=0,ad-bc=-1)$

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ とおくと　$(a+d=0,ad-bc=-1)$ より

$$x+v=\frac{1}{2}(a+d+6)=3,\ xv-yu=\frac{1}{4}\{(a+3)(d+3)-bc\}=\frac{1}{4}\{ad-bc+3(a+d)+9\}=2$$