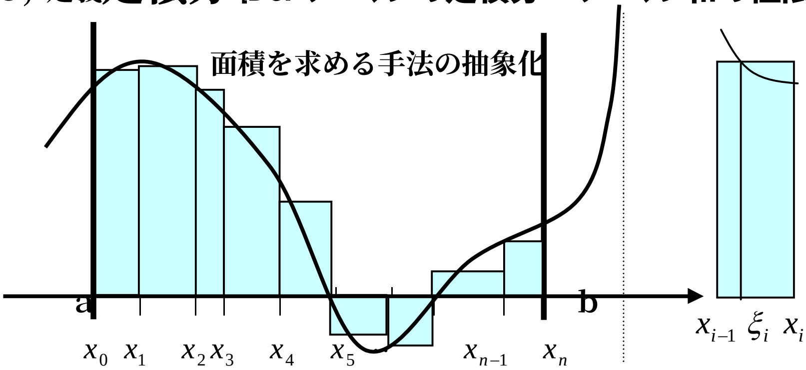
[花プリ]**区分求積法**＝区画に分けて面積を求める方法＝**積分**無限小解析学＝微分積分学

I (1)　面積を求めるいろいろなアイデアに　三角形分割　取り尽し法　・・・・

(2) 区分求積法とは区画に分けて面積を求める方法。という意味で、これが積分そのものである。

(3) 定義**定積分** [Def リーマンの定積分＝リーマン和の極限]



関数 $f(x)$ の区間[a,b]上の定積分の定義（スタート）

$$\mathrm{I}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

関数値　＊　幅　　←リーマン和の極限

$n\to\infty$ のとき区画の最大幅 $\delta\to 0$ であるものとする

定積分を定義する手順

① 関数 $f(x)$ と有界閉区間［a, b］に対し（この段階では $f(x)$ の連続性も正負も前提としない・初めから連続な関数に対し定積分を定義することもあるが）

② 閉区間［a,b］の任意の分割と各区画内の任意の点 ξ_i での関数値（常に正とは限らない）を考え，
関数 $f(x)$ のリーマン和
$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ を作る

③ 区画の最大値 δ が 0 となる分割数を無限にした**リーマン和**の極限を考える

(4)　$f(x)=x^2$　[0,1]　, $f(x)=e^{-x^2}$ [-1,1]　　$f(x)=\dfrac{1}{x}$　[-1,1]

などに適用したらどうなる？（定義による積分）任意の区画と ξ_i の取り方に対してこの和（リーマン和という）の極限は収束するのだろうか。微分は 0/0 の不定形，積分は級数

(5)証明　$f(x)$ が　連続　のとき I は収束することが証明される。

連続関数の一様連続性など高校でのレベルを超える内容を使うので略　不連続な関数すべてが積分不可能というわけではない.
閉区間で有界、有限個の点を除き連続な関数も積分可能である
「連続は積分可能の十分条件」

“ **連続関数 $f(x)$ のリーマン和の極限は収束する** ”

［解析学（無限を扱った数学)］

$x=a$ **で微分可能の定義**（滑らかに繋がっているイメージ）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ \text{が存在}$$

$x=a$ **で連続の定義**（繋がっているイメージ）

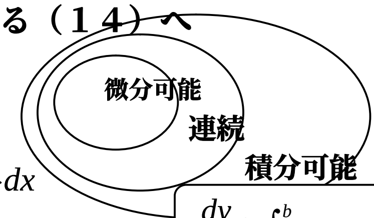
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\quad \text{が成立}$$

$[a,b]$ **で積分可能の定義**

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\ \text{が存在}$$

(6)　存在することはわかっても,**この極限の実際の計算は大変である（１４）へ**

(7) 収束するとき、この極限値 I をどのように書いたらいいか。



・ $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ と書けば,この極限記号は本来の意味を反映する。

・(ライプニッツのアイデア) $\lim\sum \leftrightarrow \int_a^b$, $f(\xi_i)\leftrightarrow f(x)$, $x_{i+1}-x_i \leftrightarrow dx$

・このとき，$f(x)$:を被積分関数、x :を積分変数、a :を下端、b :を上端という

・ $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ は極限記号であって区間［a,b］を区画に分けてできた短冊の和で区画を無限に多くした極限という意味を持っていると考えるようにする.

$\dfrac{dy}{dx}$ や $\int_a^b f(x)dx$ は極限記号で本来ひと塊のものである。

・「このイミで　dx を小さい横幅　∫をいっぱい寄せ集める　などと読んで理解することになる」

・ ∫　は和（Sum)，dは差（Diffrence)

Ⅱ (8) $f(x)$, $g(x)$ が［a,b］で連続のとき

定積分の変数はダミー変数

[Def] $\int_a^a f(x)dx = 0$，$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ と定義する．$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

定積分の定理[Th]　線形性 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$　(a,b,c の大小には無関係) 証明すべて定義より明らか

◆積分不等式　以下 a<b は重要　“注意，微分不等式 $f(x) \le g(x) \Rightarrow f'(x) \le g'(x)$ は不成立”

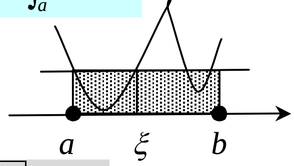
$f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$，　$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$，　$|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$

証明すべて定義より。　$|f(x)| \le g(x)$ のとき，$|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b g(x)dx$ も重要

◆定積分の平均値の定理　$f(x)$ が［a,b］で連続のとき

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ なる $\xi(a<\xi<b)$ が存在する←地ならし定理

↑少なくとも１つ



[比較]　微分の平均値の定理　$f(x)$ が［a,b］で連続で（a,b）で微分可能のとき

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$ なる $\xi(a<\xi<b)$ が存在する←因数取り出し定理

↑少なくとも１つ

Ⅲ　区間を等分した特別なケース

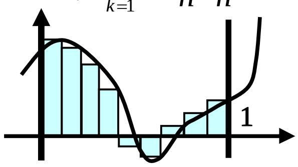
(9)　［a,b］で $f(x)$ が連続のとき（あらゆる区分と ξ_i の取り方に対して）収束する事が証明されているので，特に、[a,b]をｎ等分し,境界（右または左端）での関数値を採用したときのリーマン和の極限

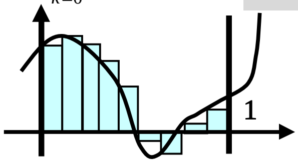
$\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ とした $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$ や $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ も収束し　$\int_a^b f(x)dx$ に等しい。

(１０) さらに，　特に０と１の間でｎ等分した形は入試では重要

[0,1]をｎ等分し,境界での関数値を採用したときのリーマン和の極限

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$　や　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$　は $f(x)$ が連続のとき収束し　$\int_0^1 f(x)dx$ に等しい。





←幅はすべて $\frac{1}{n}$（等間隔）

つまり，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\}$ および $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(\frac{0}{n}) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n-1}{n})\}$

の形の数列の極限はリーマン和の極限、積分の定義そのもので f が[0,1]で連続ならば収束し

$= \int_0^1 f(x)dx$ で計算できる．

定積分の計算を数列の極限で行なう.またはその逆,数列(リーマン和)の極限を定積分で行なうことを**区分求積法**と呼ぶ。高校の教科書・受験数学ではこの形の数列の極限を定積分で行なうことを区分求積法といい、入試でよく出題される．閉区間連続性だけを前提としており（$f \ge 0$ であることを前提としない)、面積とは関係ない。

(１１)いろいろな区分求積の方法がある。***分けて集める（積む）という手法***は共通。もちろん、その収束性（積分可能性）についての厳密な理論は必要である。リーマン積分・ルベーグ積分・バウムクーヘン積分

日本の現行の高校の教科書（学習指導要領）では定積分を形式的に基本公式で定義してしまうので,大学の先生等からは非常に評判が悪い：［a,b］で $f(x)$ を連続関数とするとき不定積分･定積分として，原始関数でもって次の様に定義し　ここからスタートする

[Def]　不定積分　$\int f(x)dx = G(x) + C \overset{def}{\Leftrightarrow} G'(x) = f(x)$

定積分　$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$

Ⅳ原始関数と定積分と不定積分の関係

(12) 不定積分［Def］［a,b］上の連続関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ において，

上端 b を x $(a \le x \le b)$ にした $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ は x の関数で $f(x)$ の**不定積分**という。

（えっ！これが不定積分）または <u>**積分関数**</u> ともいう
定積分で定義される関数

［覚え方］FU 定積分は F(x)
GE ン始関数 G(x)

ここで，いよいよ微分の登場となります。（微分と積分とは歴史的には独立した概念）

(13) 原始関数［Def］ $G'(x) = f(x)$ なる $G(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**といい

$\int f(x)dx = G(x) + C$ と表す(C ：積分定数)。 次の（１４）により

$G(x) \to f(x)$
→微分演算子

$f(x)$ の原始関数を求めることを $f(x)$ を（不定）**積分する**といい， $f(x)$ を**被積分関数**という
原始関数は定積分とは関係なく微分によって定義されたもの

原始関数の線形性 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\boxed{\text{証}}$定義と微分の線形性から

(14) $\boxed{\text{ニュートンとライプニッツ}}$は連続関数に対してリーマン和の極限 I の計算が，極限の計算ではなしに微分の公式から簡単にできることを発見した。それが『微分積分学の基本定理』と『基本公式』である（逆の操作・微分で積分）

「微分積分いい気分」「微分のことは微分でせよ積分も微分でせよ」

なお微分の定義は $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ←平均変化率の極限

元々微分と積分とはまったく別のもの

① ［Th.］**微積分学の基本定理**

$[a,x]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ ←

［イミ］ $f(x)$ の不定積分は
$f(x)$ の原始関数の１つである
$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$
なるほど不定積分と呼ぶわけだ

$f(x)$ が連続のとき
$\int_a^x f(t)dt \to f(x) \to f'(x)$
必ず存在　　存在するとは限らない

$\boxed{\text{証明}}$ $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{c \to x} \frac{hf(c)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x) \quad \boxed{\text{終}}$$

微分の定義　　積分の性質　　積分の平均値の定理　 f ：連続

② ［Th.］**微積分学の基本公式** $G'(x) = f(x)$ とすると $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

$\boxed{\text{証明}}$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) + C$ （①より）

［イミ］原始関数で
積分が簡単に求められる

$F(a) = 0$ より $C = -G(a)$ よって ， $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$

$x = b$ とおくと $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ $\boxed{\text{終}}$

なお、 $G(b) - G(a)$ を $[G(x)]_a^b$ と表記することが多い

V(15) 部分積分法　$f(x)$, $g(x)$ が [a,b] 上の C^1 関数（1次導関数が連続な関数）のとき

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,\quad \int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

［証明］積の微分公式から得る　　$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$ とかかれる事も

(16) 置換積分法　$f(x)$ が［a,b］上で $\boxed{\text{連続}}$ $x=\varphi(t)$ は C^1 関数で $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$ とする

type 1　$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,\quad \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

証明　$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ のとき　$x=\varphi(t)$ とすると

C^1 関数とは 1 次導関数が連続である関数

t	α → β
x	a → b

$$\frac{d}{dt}F(x) = \frac{F(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)\frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$ 　ゆえに $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(x)$

$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$ 終

type2　$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \quad t=\varphi(x)$ の形で利用する事が多い

(17)　原始関数が分からないと積分(リーマン和の極限)は簡単に求まらない。決してできない。
例　連続関数の不定積分は必ず存在する。ただし,微分の場合と異なり簡単な関数でも初等関数では表すことができないことがある。（存在はするが求められない。方程式の解・・犯人）

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$（楕円積分), $\int e^{-x^2}dx$（確率積分), $\int \sin x^2 dx$ (Fresnel 積分)

応用上その積分が必要となるときがあり，そのときは名前をつけて扱う。そこで特殊関数（Special-Function）の登場となる。ガンマ関数,ベッセル関数,ルジャンドル関数 ・・・

VI(18)　いろいろなリーマン和とその極限で定義される量

特別な場合として, f が考えている区間[a,b]で連続で、$y=f(x)\geq 0$ ***(常に正 or 負)なら***
リーマン和の収束する極限値を x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の

面積→抽象化→再定義

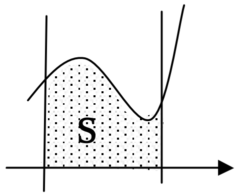
面積と定義する。このとき面積 $S=\int_a^b f(x)dx$

ある量を区分求積の考え方で表現すると
$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^n \xi_i$ の連続関数 $(x_i - x_{i-1})$
$(x_{i-1}\leq \xi_i \leq x_i$ とする$)$
の形になったとするこれは収束して
$=\int_a^b$ 連続関数dx　←定積分の定義

**以上のアイデアで分けて集める対象が何であるかによって、
面積だけでなく体積や曲線の長さ,その他の量に適用される。
はじめに，面積、体積、曲線の長さがあるのではなく定義される
量である。これらは極限用語**

① $I=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ で $f(x)\geq 0$ が連続のとき、

収束するこの極限を面積と定義する。つまり　**面積 S=** $\int_a^b f(x)dx$



② $I=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^n S(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ で断面積 $S(x)(\geq 0)$ が連続のとき、

収束するこの極限を体積と定義する。つまり　**体積 V＝** $\int_a^b S(x)dx$

③ $I=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^n \sqrt{1+\{f'(\xi_i)\}^2}(x_i - x_{i-1})$ で $f'(x)$ が連続のとき、収束するこの極限を

$f(x)$ の曲線の長さと定義する。つまり　**曲線の長さ L=** $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

■**定義　曲線の長さ　図の折れ線部分の長さ**

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}^2}$$

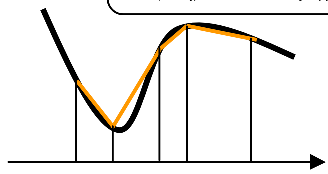
$S=\int_a^b ydx \quad ,L=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$f(x)$ **が** $[a,b]$ **で微分可能のとき、平均値の定理より**

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{(x_{k+1}-x_k)f'(c_k)\}^2}\ ,\ (x_k<c_k<x_{k+1})$$

C^1 関数とは　1 次導関数が連続である関数のこと

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\,(x_{k+1}-x_k)$$



$g(c_k)=\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}$ ，$\Delta_k=x_{k+1}-x_k$ **とおくと**

$$=\sum_{k=0}^{n-1} g(c_k)\Delta x_k$$

$f'(x)$ **が連続のとき、** $g(x)=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ **は連続より**

この和は連続関数のリーマン和であるから， $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\to 0}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\,(x_{k+1}-x_k)$

は収束し，積分の定義から $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ **である。**

これで曲線の長さを定義する。

微積分の２つの顔
$f'(x)$ と $\dfrac{dy}{dx}$ とミックス
を使い分ける

④　その他　回転体の表面積，極方程式での面積・曲線の長さ

Ⅶ　$dy,dx,\int$　の圧倒的説得力 $dy,dx,\int$　を単体で使っても間違わないで使えるように

(19) 微分 dy の定義

$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ から $dy=f'(x)dx$ や $dy=\dfrac{dy}{dx}dx$ としてよいの？

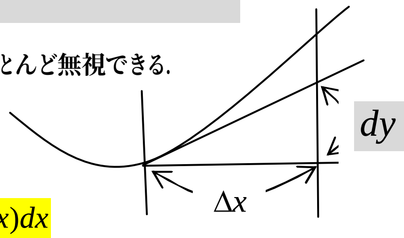
①　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ←商の極限、存在するとは限らない．

存在するとき、微分可能といい記号（極限記号）$f'(x),\ \dfrac{dy}{dx}$ と書く。

一塊 $\dfrac{dy}{dx}$　$\int dx$ をほぐして主役に
$dx,dy,\int$　なる記号が一人歩き

②　[DEF]　①の $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ が存在するという仮定の下で、　十分に Δx が　0　に近いとき，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$　よって　$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$　で　$\varepsilon\Delta x$　は　ほとんど無視できる．



このときの Δy **の主要部を微分といい**　$dy\overset{def}{=}f'(x)\Delta x$　**と定義する。**

x それ自身を x の関数と見れば $x'=1$ だから　$dx=\Delta x$　よって $dy=f'(x)dx$

これを $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ とかくならば　記号 $\dfrac{dy}{dx}$ において dx，dy が各々独立の意味を持つ。

③　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$　，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

dy,dx に対し $\dfrac{dy}{dx}$ は分数のように扱えるんだ！しかし，ディーワイ·ディーエックスと読み決して分数のように読まないこと　$y=f(x)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\Leftrightarrow dy=f'(x)dx\Leftrightarrow dy=\frac{dy}{dx}dx$$

(20) 置換積分

$f(x)$ が［a,b］上で $\boxed{\text{連続}}$ ，$x=\varphi(t)$ は $\boxed{C^1\text{関数}}$ であるとして

$x=\varphi(t)$ のとき $\dfrac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ を $dx=\varphi'(t)dt$ や $dx=\dfrac{dx}{dt}dt$ と形式的にできる

置換積分の公式 $\displaystyle\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ は $\displaystyle\int ydx=\int y\frac{dx}{dt}dt$ と表現できる

●パターン1

突然，三角関数等に置き換えする！

$\underset{\text{新変数}}{\theta}\to x\to y$　$\displaystyle\int ydx=\int y\frac{dx}{d\theta}d\theta$　は $x=\varphi(\theta)$ と置く型

$\underset{\text{新変数}}{t}\to x\to y$　$\displaystyle\int ydx=\int y\frac{dx}{dt}dt$　は $x=\varphi(t)$ と置く型

↑ $\boxed{\text{これは媒介変数表示だ}}$

新変数 t,θ を登場させ元の変数 x を新変数の関数値とする置き換え（知っていないとできない）を行う（スタートに t，θ ）

$\boxed{\text{例 1}}$ $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ は $x=\sin\theta$ と置く

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$　は $x=\tan\theta$ と置く

とうまくいくことを知っておく。

実は逆三角関数の微分法より[大学]

$(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$x=\sin\theta$ のとき

$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$　を

$dx=\cos\theta d\theta$ として形式的に扱う

(左辺はxで、右辺は θ で微分)

こんな変形も許される

$f(x)=g(t)$ から形式的に

$f'(x)dx=g'(t)dt$

$\boxed{\text{例 2}}$ 媒介変数表示された関数 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ 、$t\to x\to y$

置き換え $x=f(t)$ がはじめから与えられていると考えられる

微分 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

$y\to g(t)$,　$dx\to f'(t)dt$,

$[a,b]\to[\alpha,\beta]$

と形式的に書き換えたものになっている!!

媒介変数の面積は置換積分で

面積 $y\geq 0$ として，$S=\displaystyle\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}dt=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$　［重要］

置換積分の公式 $\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$　は　$\displaystyle\int y\frac{dt}{dx}dx=\int ydt$　と表現できる

この y は x の関数

この y は t の関数で $y(t)$ と書かれることもある

●パターン2

$x\to\underset{\text{新変数}}{t}\to y$，$\displaystyle\int y\frac{dt}{dx}dx=\int ydt$

置き換えするものが見えている

$\displaystyle\int f(\Delta)\Delta'$ 型

$\Delta=t$ とおく置き換えを行う（中を t ）

$\boxed{\text{例 3}}$ $\displaystyle\int f(\sin x)\cos xdx$ 型は　$t=\sin x$

$\displaystyle\int f(\cos x)(-\sin x)dx$ 型は　$t=\cos x$

$\displaystyle\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ 型は　$t=\tan x$

$\displaystyle\int f(\log x)\frac{1}{x}dx$ 型は　$t=\log x$

$\displaystyle\int f(e^x)e^xdx$ 型は　$t=e^x$

$t=\sin x$ のとき

$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$　を

$dt=\cos xdx$ として形式的に扱う

(左辺はtで、右辺はxで微分)

(21)面積・体積・曲線の長さの公式の理解に $dy, dx, \int$ の圧倒的説得力

積分＝積微分（微細な増分を寄せ集める）

「$\int_a^b f(x)dx$」は「区間$[a,b]$を無限小幅dxの小区間に分割各xにおける無限小幅の短冊の面積$f(x)dx$を求めて$x=a$から$x=b$までそれらを$\int(=\sum\ )$したもの」

つまり薄い幅に高さを掛けた短冊をaからbまで寄せ集めたものが面積。と区分求積の意味を考えて使うように心掛けるとよい。
これで分かった積もりになればよし

$\int_a^b$ は「aからbまで無限小幅の短冊を寄せ集める」, dxは「無限小の幅」といったイメージで捉える

① ydx, xdy の寄せ集めが面積　**面積＝$\int$ 長さ･幅**

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}dt\quad (y>0)\ (x=f(t):y=g(t))$$

$$S=\int_c^d xdy=\int_e^f x\frac{dy}{dx}dx\quad (x>0)\ (y=f(x):x=g(y))$$

[知ッ得] $\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2d\theta$ 極形式で微細な面積を $S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2d\theta$

媒介変数では

$$dx=\frac{dx}{dt}dt,\quad (x\to t)$$

変数変換は

$$dy=\frac{dy}{dx}dx,(y\to x)$$

と形式的に変換したもの

② $S(x)dx, \pi y^2dx, \pi x^2dy$ の寄せ集めが体積　**体積＝$\int$ 断面積･幅**

$$V=\int_a^b S(x)dx\qquad S(x)\text{ は断面積}$$

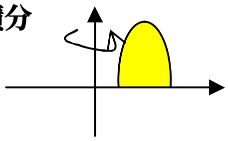
$$V_x=\int_a^b \pi y^2dx=\int_\alpha^\beta \pi y^2\frac{dx}{dt}dt$$ ←x軸の周りの回転体の体積と媒介変数への変換

$$V_y=\int_a^b \pi x^2dy=\int_c^d \pi x^2\frac{dy}{dx}dx$$ ←y軸の周りの回転体の体積とxへの変数変換

[知ッ得] バウムクーヘン積分

$$dV=2\pi xf(x)dx$$

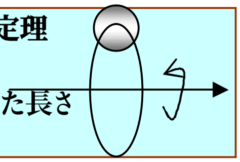
$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)dx$$



[知ッ得]パップス･ギュルダンの定理

$$V=lS$$

S：面積　l：重心Gが1回転した長さ



[知ッ得] 直線 $y=x$ の周りの回転体の体積

関数の形を変えない為に回転軸方向の積分ではなく、あくまでx軸方向の積分で

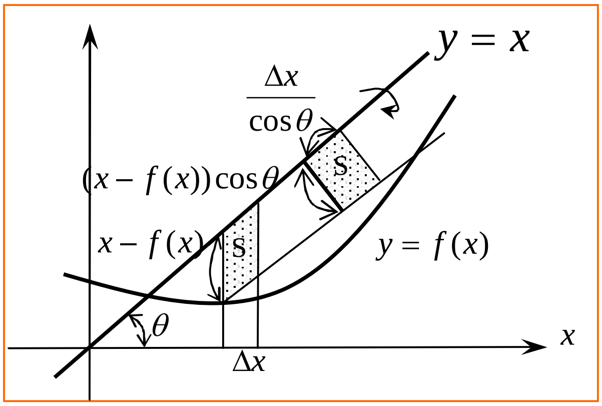
$$\Delta V=\pi\{(x-f(x))\cos\theta\}^2\frac{\Delta x}{\cos\theta}\ \text{より}$$

$$=\pi\{x-f(x)\}^2\cos\theta\,\Delta x$$

$$V_{y=x}=\int_a^b\pi\{(x-f(x))\cos\theta\}^2\frac{dx}{\cos\theta}$$

$$=\int_a^b\pi\{x-f(x)\}^2\cos\theta\,dx$$

$$=\cos\theta\int_a^b\pi\{x-f(x)\}^2\,dx$$ ←この結果なら覚えやすい



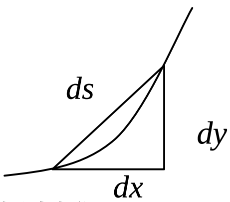
③ 線素 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,|dx|=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,|dt|$　**曲線の長さ＝$\int$ 線素**

の寄せ集めが曲線の長さ

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt$$

[参考]　$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{f(\theta)^2+(f'(\theta))^2}d\theta$ (極座標)



切り出してきた微分をx成分dx、y成分dyの2つにほぐし組み合わせてみたところで初めて意味が生じる

$dx+dy, dx\cdot dy, (dx)^2+(dy)^2, \frac{dy}{dx}$

(22)微分方程式 $y'=\dfrac{dy}{dx}$ とおく→変数を分離する→両辺に $\int$ を付ける という変形が許される

◇ $y'=ky$ を解け。 $dy, dx, \int$ を単体で使った変形←どっちが実用的か↓ 普通の変形

$\dfrac{dy}{dx}=ky$ ← $\boxed{y'=\dfrac{dy}{dx} \text{ とおく}}$

$\dfrac{1}{y}dy=kdx \ (y\neq 0)$ ←変数分離形は **変数を分離する？**

$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy=\int kdx$ ← **両辺に $\int$ を付ける？**

$\log|y|=kx+C$

$|y|=e^{kx+C}$

$y=\pm e^{C}\cdot e^{kx}=Ae^{kx}$（$y=0$ も含め A は任意の実数）

$f'(x)=kf(x)$ $f(x)\neq 0$ のとき

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=k$ の両辺を x で積分して

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int kdx$

$\log|f(x)|=kx+C$

$|f(x)|=e^{kx+C}$

$f(x)=\pm e^{C}\cdot e^{kx}=Ae^{kx}$

一般の変数分離形では，圧倒的に $dy, dx, \int$ を単体で使った変形の方が実用的

◇ $y'=p(x)q(y)$

$\dfrac{dy}{dx}=p(x)q(y)$

$\dfrac{1}{q(y)}dy=p(x)dx\ ,\ q(y)\neq 0$

$\displaystyle\int \frac{1}{q(y)}dy=\int p(x)dx$

$f'(x)=p(x)q(y)$ $q(y)\neq 0$ のとき

$\dfrac{f'(x)}{q(y)}=p(x)$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{q(y)}dx=\int p(x)dx$

$\displaystyle\int \frac{\frac{dy}{dx}}{q(y)}\frac{dx}{dy}dy=\int p(x)dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{q(y)}dy=\int p(x)dx$

◇変数分離形

ロジスチック方程式 (重要)　出題予想問題

◇ $\dfrac{dy}{dx}=\alpha(A-y)y$ これは変数分離形であるから、両辺を $(A-y)y$ で割り次のように表す

$\dfrac{1}{(A-y)y}dy=\alpha dt$ この両辺を積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{(A-y)y}dy=\int \alpha dt$ したがって $\displaystyle\int (\frac{1}{A})(\frac{1}{A-y}+\frac{1}{y})dy=\int \alpha dt$

$\dfrac{1}{A}\log\left|\dfrac{y}{A-y}\right|=\alpha t+C_1$ $\quad\log\left|\dfrac{A-y}{y}\right|=-\alpha At-AC_1$

$\dfrac{A-y}{y}=\pm e^{-AC_1}\cdot e^{-\alpha At}$ ここで、$\pm e^{-AC_1}=C$ とおき，y について解くと

$y=\dfrac{A}{1+Ce^{-\alpha At}}$

この方程式は人口の増加の予測、生態学、社会学などさまざまな分野で使われている

◇変数分離形　$y' = p(x)q(y)$

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y)$$

$$\frac{1}{q(y)}dy = p(x)dx \ , \ q(y) \neq 0$$

$$\int \frac{1}{q(y)}dy = \int p(x)dx$$

微積分の２つの顔

①　$f'(x)$

$\int f(x)dx$

②　$\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$\int ydx = \int y\frac{dx}{dt}dt$$

①②融合

$dy = f'(x)dx$

◇ 同次形　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$ という形なら

$y = ux$ とおけば、変数分離形に帰着

◇ 線形･斉次形　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + f(x)y = 0$ という形なら

変数分離形 $\dfrac{1}{y}dy = -f(x)dx$ に変形できて　一般解は　$y = Ce^{-\int f(x)dx}$

◇ 線形･非斉次形　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ という形なら

一般解は　$y = Ce^{-\int f(x)dx}\left\{\left\{\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right\}\right.$

■ C^1 級でない関数の例

① $f(x)$ は微分可能であるが、 $f'(x)$ は連続ではない例はあるのか

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

証明

（ｉ） $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} + x^2(-\dfrac{1}{x^2})\cos\dfrac{1}{x} = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$　　$(x \neq 0)$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$ で微分可能

（ii）一方　$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x})$ は収束しない　$f'(0) = 0$

ゆえに，$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ は成り立たない　　$\therefore x = 0$　で連続でない

■極限の BIG3（級数　微分　積分）が手を結ぶ

級数＝lim 部分和　　コーシー列⇔収束する，　lim 一般項＝0 ⇒ 収束する　無限和

微分＝lim 平均変化率　微分可能 ⇒ 連続　　接線の傾き

積分＝lim リーマン和　連続 ⇒ 積分可能　　面積

積の微分には部分積分が 、 合成関数の微分には置換積分が対応

■ [参考] dx、dy、∞って何？無限小解析学

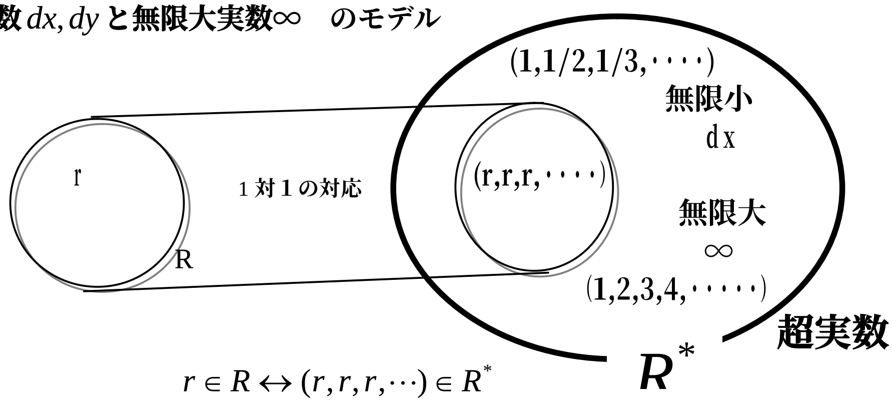
[Def.] 無限大実数＝任意の数 N より大きい数・・ 無限大
無限小実数＝任意の正の数nより小さい数・・ 無限小

dx dy ∞って数？実数？ $dx \in R(?)$ $\infty \in R(?)$ これに四則演算等をすることは？

ロビンソンの超準解析学で，超実数として **無限小実数** dx **無限大実数∞** の無矛盾性が証明された。R 実数（＋－×÷）を部分集合にもつ 実数の無限個の組からなる要素を元に持つ集合R*超実数（＋－×÷）を考え、そこに ある場所以降 すべて小さい時、小さいと大小関係を定義すると実数r⇔（r、r、r、r、r、r、・・・・・・）として，無限小実数 dx のサンプルとして（1、1/2,1/3, 1/4, ・・・・）などこのモデルで四則演算や大小関係など無矛盾性がいえるというのだが・・・・

無限小実数 dx, dy と無限大実数∞ のモデル

動的に捉える無限大・無限小はグラフで比較的容易だが、**静的に捉える**無限大・無限小は難しい



$$r \in R \leftrightarrow (r, r, r, \cdots) \in R^*$$

無限小 dx の例 $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cdots) \in R^*$

無限大 ∞の例 $(1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots) \in R^*$

虚数 i は複素数平面で見えた
これで無限小 dx 、無限大∞
も見えた気がする

解析学（無限の数学）

初心者	教科書	**極限の限りなく近づく論法** **無限等比級数と収束条件** **不定形の極限値**， $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,\ \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ 関数の**微分**（合成関数の微分）と**グラフ** **原始関数 定積分と不定積分，部分積分法と置換積分法** **面積・体積（軸の周りの回転体）が求まる**
中級者	受験	**不等式とハサミウチ論法 級数の定義** **微分の定義，平均値の定理，関数の連続性と微分可能性** **区分求積法**，絶対値の定積分，工夫を要する定積分，Wallis の公式 曲線の長さ，位置・速度・加速度、道のり，水の問題 **調和数列**等の和への応用、媒介変数表示の曲線の面積・体積・曲線の長さ 極限・微分・積分の融合，関数方程式・微分方程式・積分方程式 工夫を要する体積（**非回転体の体積** $z = k$ 、斜め軸、バウムクーヘン積分）
上級者	大学	極限の $\varepsilon - \delta$ **論法，πや e の超越性**，定積分の定義（リーマン和の極限） 逆三角関数・双曲線関数・逆双曲線関数の微積分， パップス・ギュルダンの定理，表面積、極方程式の面積・体積・曲線の長さ $dx, dy, \int$ ，**特殊積分**，ルベーグ積分， **テイラー展開・マクローリン展開，フーリエ級数**， 級数の収束性，関数項級数の扱い（収束性と連続性），2重極限

[あのね] 数学Ⅲは数学∞（Ⅲ→∞とみよ。） 数学Ⅲは無限の数学。

[花プリ]初等関数 （三角関数の逆関数それに双曲線関数も仲間にいれて）

◆ 指数関数 ◇定義 $a>0$ のとき、$\alpha \in R$ に対して

i $a=1$ のとき, $a^{\alpha}=1$

ii $a>1$ のとき, $a^{\alpha}=\sup\{a^{r} : r$は有理数, $r\leq\alpha\}$

iii $0<a<1$ のとき, $a^{\alpha}=\inf\{a^{r} : r$は有理数, $r\leq\alpha\}$

$y=a^{x}\,(a>0, a\neq 1)$ を a を底とする**指数関数**という。

積分で定義すると

$$\log x \overset{def}{=} \int_1^x \frac{1}{x}dx \quad (x>0)$$

$$y=e^{x} \overset{def}{\Leftrightarrow} x=\log y$$

◆対数関数 （逆指数関数？）

◇ 定義 $y=\log x \Leftrightarrow x=e^{y}$ ◇ グラフ・性質

◇ 微分・積分 $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$, $\int \log x dx = x\log x - x + C$

マグニチュードという目盛は対数目盛（底は10），1違うと地震の規模は10倍違い。よって、マグニチュード7の地震はマグニチュード3の地震の１万倍の大きさである。

◆三角関数 （円関数）

◇ 定義 原点を中心とする単位円周上を動く動点 P を考える． P が点 $(1,0)$ から正の向きに行程 $x(\in R)$ だけ進んだ位置に於ける x, y 座標をそれぞれ $\cos x, \sin x$ で表す。また, OP の傾きを $\tan x$ と定義する。

$y=\cos x$ を余弦関数、 $y=\sin x$ を正弦関数 、 $y=\tan x$ を正弦関数という

◆逆三角関数 （逆円関数）

◇ 定義 ・$y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y,\ -\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}$ アークサイン $y=\arcsin x$ ともかく

・$y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\cos y,\ 0\leq y\leq\pi$ アークコサイン $y=\arccos x$ ともかく

・$y=\tan^{-1}x \Leftrightarrow x=\tan y,\ -\dfrac{\pi}{2}< y<\dfrac{\pi}{2}$ アークタンゼント $y=\arctan x$ ともかく

[注意] $\sin^{-1}x$ などと -1 の上付き添字を使うが、$\sin x$ の逆数ではないことに注意

◇ グラフ ◇性質 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

◇ 微積分 $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$, $(\cos^{-1}x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$, $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\theta+C=\sin^{-1}x+C\ (x=\sin\theta)\ ,\ \int\frac{1}{1+x^2}dx=\theta+C=\tan^{-1}x+C\ (x=\tan\theta)$$

[あのね] この2つが教科書に置換積分の例としてある理由はここにあったのか

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\ (a>0)\ ,\ \int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C\ (a\neq 0)$$

[高校では定積分として出されるので，逆三角関数を必要とせず値が求まる]

◆ 双曲線関数◇ 定義 $\cosh x \overset{def}{=} \dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

ハイパボリックコサイン（[あのね]コシャインと言ったりする）

$\sinh x \overset{def}{=} \dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$, $\tanh x \overset{def}{=} \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

ハイパボリックサイン（シャイン）, ハイパボリックタンゼント（チャンゼント）

◇ グラフ カテナリー $y=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

の面積・体積・曲線の長さの計算時に利用

◇ 性質 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ ←2 乗の差が１

◇ 微分・積分 $(\sinh x)'=\cosh x$, $(\cosh x)'=\sinh x$

◆逆双曲線関数

動的な現象を捉える三角関数と
静的な現象を捉える双曲線関数

角の単位（度とラジアン）と三角比
三角関数と円関数についての考え方

- 角は図形から切り離せない（辺と角）
- 角を表す単位には2つ（度数法と弧度法）
- 大きさを考える角と一般角という回転量で表す角がある
- 円関数の $y=\sin x$ が一般角の三角比 SIN θ と同様の概念になる （特に弧度法で）
- これらの混乱が高校の教科書での理解を妨げる（いつのまにか θ が x になっており 関数に飛ぶ）
- 円関数の独立変数をとくに角と呼ぶことがある 対数関数の独立変数をとくに真数と呼ぶことがある

定義　曲線群$\{C_\alpha\}$が与えられたとき、すべてのC_αに接する曲線Cを曲線群の**包絡線**(Envelope)という。

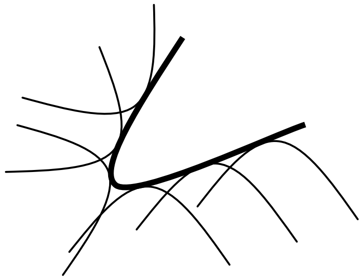
公式　曲線群$\{C_\alpha\}$が方程式

$$f(x,y,\alpha)=0$$

で与えられているとき　**包絡線は**

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$$

から　αを消去した式で与えられる。



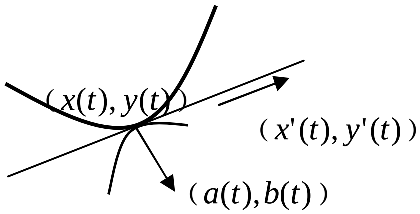
[証明]　$\forall t\in R : C_t$とCが接する　(*)

$\Rightarrow$　C 上で接点となっている点をP(X,Y)とすると少なくとも1つ$\exists t\in R$;以下の条件を満たす

P$(x(t),y(t))$で,接線ベクトルは$(x'(t),y'(t))$,法線ベクトルを$(a(t),b(t))$とすると

接線の方程式は　$a(t)x+b(t)y+c(t)=0$　････①　で

$$\begin{cases} \underline{a(t)x'(t)+b(t)y'(t)}=0 & ････② \text{ 垂直条件} \\ \text{この直線①上に}(x(t),y(t))\text{があるので} & \\ a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0 & ････③ \text{ 接線上の点であることの定式化} \end{cases}$$



③はtの恒等式だからtで微分して

$a'(t)x(t)+\underline{a(t)x'(t)}+b'(t)y(t)+\underline{b(t)y'(t)}+c'(t)=0$　　③'

③'と②より$a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0$　④

ゆえに　$\begin{cases} a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0 & ③ \\ a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0 & ④ \end{cases}$　　(これは　＊の必要条件)

これから$x(t),y(t)$を求めれば　包絡線の媒介変数表示$(X,Y)=(x(t),y(t))$が得られる

③④からtを消去して包絡線の方程式を得る(必要条件)

？？？以上から$\begin{cases} a(t)X+b(t)Y+c(t)=0 & ⑤ \\ a'(t)X+b'(t)Y+c'(t)=0 & ⑥ \end{cases}$

[類似] 1つの条件式　に　それを　微分して得られる式を追加する手法の例

剰余の恒等式　$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$

から　　$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q(x)$

ゆえに　$f(x)$が$(x-\alpha)^2$で割り切れる$\Rightarrow\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \end{cases}$

この逆も成り立つ

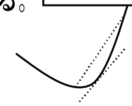
よって,　$f(x)$が$(x-\alpha)^2$で割り切れる$\Leftrightarrow\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \end{cases}$

[花プリ] テイラー展開，マックローリン展開、フーリエ級数

先生がしゃべったり、参考書にちょこっとでてきたり、幽霊かＵＦＯの様でその真の正体は何なの？

(1) ロル (Rolle) の定理　関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能であり、$f(a)=f(b)$ とする。このとき，$f'(x_0)=0$ となる点 x_0 が (a,b) に存在する

抽象関数の性質をグラフで判断するのは危険



(2) 平均値の定理　関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能であるとする。

このとき、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$　となる点 x_0 が (a,b) に存在する。

[使い方][因数取り出し定理]　$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$　$(a<x_0<b)$　← ここまでは高校の範囲

[一般化]　$f(b)=f(a)+f'(x_0)(b-a)$　の形からの一般化がテイラーの定理

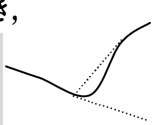
(3) 定理　関数 f，g は閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能であるとする。

また　$g(a)\neq g(b)$ で f' と g' は $[a,b]$ で同時に0にならないとする。このとき、

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$　となる x_0 が (a,b) に存在する。

(4) テイラー (Taylor) の定理　$f^{(n)}(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能とする。このとき，

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+R_n$$



と書ける。ここで、R_n は次のいずれかの形に書ける。

ラグランジュ型　$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$　$(a<x_0<b)$

コーシー型　$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)(b-x_0)^n(b-a)}{n!}$　$(a<x_0<b)$

ここで、R_n のことを**剰余**という。

テイラー展開する，マクローリン展開する　って何のこと？
C^∞ 級関数に対し，テイラーの定理，この特別な形が剰余を伴ったテイラー級数,その特別な形がテイラー級数,さらにその特別な形がマクローリン級数である.

(5)　定義　テイラーの定理の仮定を満たす関数 f に対し、特に $a=x_0$，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

と書けるが、これを f の「**剰余を伴ったテイラー級数**」という。特に，

$\boxed{\lim_{n\to\infty}R_n=0\text{となる }x\text{ において(ここが本質)}}$上の式で得られる無限級数のことを「**テイラー級数**」という。$x_0=0$ のときは，特に「**マクローリン (Maclaurin) 級数**」といわれる。関数 f をテイラー級数・マクローリン級数に表すことを　それぞれ「**テイラー展開する**」・「**マクローリン展開する**」　という。

(6)　関数のマクローリン (Maclaurin) 展開の例　*先のほうが0となるところで*

① $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$　$(-\infty<x<\infty)$

② $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$　$(-\infty<x<\infty)$

③ $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$　$(-\infty<x<\infty)$

④ $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$　$(-1<x\leq 1)$

⑤ $(1+x)^\alpha={}_\alpha C_0+{}_\alpha C_1x+{}_\alpha C_2x^2+{}_\alpha C_3x^3+\cdots$　$(-1<x<1)$

⑥ $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$　$(-1<x<1)$　無限等比級数の和

この展開の考え方を知って入試問題の意味を理解する
- **難　を　易で近似あるいは表現**
- **関数の整関数近似**
- **ハサミウチ論法への応用**
- **超越数 e，π，$\log 2$ の表現**

$e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$

$\log 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$

『**級数は、収束しないと、意味がない**』
[あるある探検隊]『黒板消すのが早すぎる』

高校では　まず級数があってその収束・発散を論ずる　さらにこれらは　関数の展開公式　逆に、級数でもって新しい関数を定義してしまうことも (特殊関数)

[花プリ] **大学入試で出題される積分の背景**

$\sin x, \cos x, e^x$ を x^n の無限個の和　つまりべき級数で表してきた。

今度は逆に x^n など、関数 $f(x)$ を $\sin nx, \cos nx$ の無限個の和で表すことを考える。

関数 $f(x)$ を $\sin nx, \cos nx$ の無限個の和で表した式をフーリエ級数という。

例えば $x = 2(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} + \cdots)$

テイラー、マクローリン級数は微分から、フーリエ級数は積分が登場する

◇フーリエ級数

を求めるときに次の積分が登場する。フーリエ級数では,次の3つが成り立つことが大切

① $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$　② $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$　さらに　フーリエ級数（一般化）であらわれる積分

④ $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$　⑤ $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$

◇裏技

$\int fe^x = fe^x - \int f'e^x = fe^x - (f'e^x - \int f''e^x) = e^x(f - f' + f'' - f''' + \cdots)$

$\int f\cos x = f\sin x - \int f'\sin x = f\sin x - (f'(-\cos x) - \int f''(-\cos x)) = f\sin x + f'\cos x - f''\sin x - f''' + \cdots$

◇微分・積分と極限の順序変更

微分・積分と極限の操作は一般に可換ではない。

$\boxed{\text{定理}}$　$f_1, f_2, \cdots f$ は有界閉区間 $[a,b]$ で可積分とする。$\{f_n\}$ が $[a,b]$ 上で<u>一様収束</u>ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{である}$$

$\boxed{\text{定理}}$　$f_1, f_2, \cdots$ は $[a,b]$ で C^1 級の関数で，$\{f_n\}$ が $[a,b]$ 上の１点で収束，導関数の列 $\{f_n'\}$ が $[a,b]$ 上で一様収束なら，$\{f_n\}$ は $[a,b]$ 上で C^1 級の関数 f に<u>一様収束</u>し

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \quad (a \le x \le b) \quad \text{である}$$

◇リーマン・ルベーグの公式

$a < b$，$\exists\varepsilon > 0$ [$a - \varepsilon < x < b + \varepsilon$ で $f(x)$ が微分可能]のとき

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = 0$　　$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0$

高周波のときの積分の打ち消しあいを表現している

◇ラプラス変換　一般に関数 $g(x)$ に対して

$G(p) = \int_0^\infty e^{-px}g(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-px}g(x)dx$ を $g(x)$ のラプラス変換といい微分方程式の理論や電気回路の理論で用います。

$\boxed{\text{問}}$　x, x^2 のラプラス変換を求めよ。$\frac{1}{p^2}, -\frac{2}{p^3}$　（$p > 0$）

$\boxed{\text{解答}}$ $G(p) = \int_0^\infty e^{-px}xdx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-px}xdx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M (-\frac{1}{p}e^{-px})'xdx = \lim_{M\to\infty}[-\frac{1}{p}e^{-px}x]_0^M - \int_0^M -\frac{1}{p}e^{-px}dx =$

$= \lim_{M\to\infty}\{-\frac{M}{pe^{pM}} + \left[\frac{1}{p^2}e^{-px}\right]_0^M) = \frac{1}{p^2}$　**←平凡な部分積分の問題**

[花プリ] 有理関数・三角関数の積分法

入試では積分 TABLE で基本の完全マスターが大切です。一方、大学の先生は　誘導形式にして
入試問題を考えるかもしれません。ここに現れた形は，　難しいけど重要な形であると認識しておこう。
「基礎で差がつく、応用で差がつく。」

■定理　有理関数　$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$　（$P(x),Q(x)$ は多項式で、互いに既約）

部分分数分解することにより

$\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}$，　$\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ $(p^2-4q<0)$　の形の有理関数の和に分解

①$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^n}dx=\begin{cases}\dfrac{A}{(-n+1)(x-\alpha)^{-n+1}} & (n\neq1)\\ A\log|x-\alpha| & (n=1)\end{cases}$$

②第２の積分は、$x=t-\dfrac{p}{2}$ と置換し，$c=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ とおくことにより

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx=B\int\frac{t}{(t^2+c^2)^n}dt+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\int\frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt$$

ｉ）$$\int\frac{t}{(t^2+c^2)^n}dt=\begin{cases}\dfrac{1}{2(-n+1)(t^2+c^2)^{n-1}} & (n\neq1)\\ \dfrac{1}{2}\log(t^2+c^2) & (n=1)\end{cases}$$

ii）$I_n=\displaystyle\int\frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt$ とおくと、I_n は漸化式

$$\begin{cases}I_1=\dfrac{1}{c}\tan^{-1}\dfrac{t}{c}\\ I_n=\dfrac{1}{(2n-2)c^2}\dfrac{t}{(t^2+c^2)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{(2n-2)c^2}I_{n-1}\end{cases}$$

より得られる

> 有理関数の不定積分は
> 有理関数（整式を含む）と
> 対数関数 $\log x$ と逆三角関数
> $\tan^{-1}x$ の組合せで書ける

■定理　$f(\sin x,\cos x)$ の形の積分　（f を２変数の有理関数）

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ と置換することにより $\displaystyle\int f(\sin x,\cos x)dx=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

となり、有理関数の積分に帰着できる。特に、$f(\sin x,\cos x)$ が $\sin x,\cos x$ の偶数べきのみを
含んでいるときは、$\tan x=t$ と置換することで、より簡単になる。

■定理　$f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ の形の積分　（f を２変数の有理関数）

はつぎのようにして有理関数の積分に帰着できる。

方程式　$ax^2+bx+c=0$ が

（１）異なる２実根をもつ場合　$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ と置換する

（２）重根を持つ場合　$f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ は有理関数

（３）２つの虚根を持つ場合　$t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ と置換する