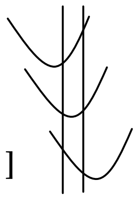
ⅠⅡＡＢ分野の最重要ポイント整理

■２次関数



◇　文字係数の頂点　微分も利用できる．　平行移動は全体を追うか頂点を追う

◇　<u>区間における最大最小</u>のコツ，区間固定方式　と定幅区間の問題

$\boxed{\text{問題}}$　a は定数とする．関数 $f(x)=x^2-4x+5\quad(a\le x\le a+2)$ について，

(1)最大値Ｍを求めよ．　(2)最小値mを求めよ．　［（3）M-mの問題　］

◇　X軸から切り取る弦の長さ→[裏技]合同な $y=ax^2$ に帰着

$\boxed{\text{類}}$　円が切り取る弦の長さ→ピタゴラス

2 次曲線が切り取る弦の長さ→$\sqrt{1+m^2}(\beta-\alpha)$，（$m$ は弦の傾き）（解と係数の関係利用）

$\boxed{\text{問題}}$　2 次関数 $y=ax^2+2ax+a+6$ の頂点は（$\boxed{\quad\quad}$，$\boxed{\quad\quad}$）また，グラフが

x 軸から切り取る線分の長さが $2\sqrt{6}$ になる $a=\boxed{\quad\quad}$ である．

◇　解の分離問題　解の分離

$\boxed{\text{問題}}$ 2 次方程式 $x^2-2ax+3a+4=0$ が次のような解をもつ定数 a の値の範囲を求めよ．

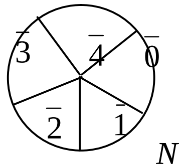
(1)　２より大きい異なる２解をもつ　(2)　２より大きい解と２より小さい解をもつ

(3)　$1\le x\le 2$ の範囲で解をもつ　　(4)　少なくとも１つの正の解をもつ

$\boxed{\text{別解}}$　定数分離法　(完全分離)

$x^2+4=a(2x-3)$ または（数Ⅲ）の内容まで学ぶと $a=\dfrac{x^2+4}{2x-3}$ で解決できる

■数論　素数　素因数分解の一意性　　互いに素



無限にある**自然数の有限化**＝剰余類　と　数学的帰納法

整数と格子点

$\boxed{\text{問題}}$　平面上の 3 点 $(0,0),(n,0),(0,n)$ を頂点とする三角形の

周および内部にある格子点の個数 S_n を求めよ．

剰余類 の考え方は自然数をグループ分けして有限個の世界に帰着すること

$\boxed{\text{問題}}$　$n\in N$ のとき，n^5-n は５で割り切れることを証明せよ．

“n^p-n は p で割り切れる（フェルマーの小定理）”

有理数＝比数＝整数の比に書ける数　「万物は数（自然数）である」ピタゴラス

有理数であるか否かの証明　$\sqrt{2},\log_2 3,\tan 1^\circ,\pi,e$

無理数＝有理数でない数（否定的に定義される）　だから

$\boxed{\text{無理数の証明}}$は背理法で有理数と仮定すると矛盾することを示す

実数　整数部分と小数部分

複素数

■ 論理　「$\neg\quad\wedge\quad\vee\quad\to\quad\leftrightarrow\quad\forall\quad\exists$」

◇　必要十分　「$p\to q$」が真⇔$P\subseteq Q$　∴「**pならば<u>例外なく</u>q**」と読め，　出発十分前，

領域は絶対値・円，逆・裏・対偶，否定（ド・モルガンの法則)，任意と存在

☆$\boxed{\text{問題}}$(1)　条件「$x>2$ または $x<-3$」の$\boxed{\quad\quad}$は「$-3\le x\le 2$」である．

(2)　実数 u,v について，命題「$u+v=0$ ならば $u^2-v+1>0$」は$\boxed{\quad\quad}$である．

(3)　正の整数 a,b について，命題「a,b がともに偶数ならば，ab は４の倍数である」と，

命題「ab が４の倍数でないならば，a,b のうち少なくとも一方は奇数である」

は$\boxed{\quad\quad}$の関係にある．

(4)　$s<-4$ は，$|s+1|>3$ であるための$\boxed{\quad\quad}$である．

解答群「十分条件　必要条件　必要十分条件　真　偽　かつ　または　ならば

逆　裏　対偶　否定　反例」

■三角形

◇　円に内接する四角形、和=180°，○定理と×定理　ダブル余弦問題∞問題
R（外接円の半径）は正弦定理，余弦定理，面積の公式　ｒ（内接円の半径）はＳ＝ｓｒ
面積の最大値，中線の長さは中線定理 と 角の２等分線の長さは面積から
ブラマグプタの公式

$\boxed{\text{問題}}$ $AB=2, BC=4, CD=3, DA=2$ の四角形 $ABCD$ について

(1)　$AD // BC$ のとき，対角線 AC の長さ x を求めよ．

(2)　四角形 $ABCD$ が円に内接するとき，四角形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\text{問題}}$　$\angle A=120°$，$AB=3$，$AC=5$ の ΔABC について，次の各問いに答えよ．

(1)　ΔABC の面積 S

(2)　辺 BC の長さ

(3)　ΔABC の内接円の半径 r および外接円の半径 R を求めよ．

(4)　$\angle A$ の 2 等分線と BC の交点を D とする．このとき，線分 BD，AD のそれぞれの長さを求めよ．

■平面図形

接弦定理　方べきの定理　メネラウス・チェバの定理　同一円周上条件

共線条件：$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

共面条件：$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

共円条件：円周角の定理の逆，方べきの定理の逆，接弦定理の逆，和＝１８０度の逆

■確率

◇　サイコロ２個の確率は６６表，コイン，じゃんけん，サイコロ 3 個，変形サイコロ，
特に球 2 個（２回）非復元抽出の問題も上三角直積空間で
一見複雑そうな問題でもこの直積空間で数える問題であることが多い．

$\boxed{\text{問題}}$　１個のサイコロを 2 回投げ，出た目を順に a,b とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ を作る．この方程式の解が重解である確率は[　　　　]
サイコロ３個投げたとき目の和が５以下となる確率は［　　　　］

$\boxed{\text{問題}}$　A,B,C の 3 人がじゃんけんをする．
１人だけが勝ったときは，勝った人に 3 点，負けた人に 0 点
２人が勝ったときは，　　勝った人に２点，負けた人に 0 点
あいこになったときは（勝負がつかなかったとき），3 人に１点ずつ与えられる．
じゃんけんを１回するとき，A の得点の期待値を求めよ．

◇　同じものを含む確率は異なると見て同様に確からしい根元事象をとらえる
赤球白球問題　　　順列の問題

◇　反復試行定理　$p_r={}_nC_r\,p^r q^{n-r}$　$(r=0,1,2,\cdots n)$

◇　Ｘの期待値を求める問題　はすぐにＸの確率分布表を作ることに着手せよ．

Ｘのとる値		確率の合計
その確率Ｐ		1

◇　時系列の問題　時間とともに変化する状況の図を描いて試行する．

☆$\boxed{\text{問題}}$　赤，青，黄，緑の４色のカードが５枚ずつ計 20 枚ある．各色のカードにはそれぞれ１から５までの番号が１つずつ書いてある．この２０枚の中から３枚を１度に取り出すとき，次の問に答えよ．

(1)　３枚がすべて同じ番号となる確率を求めよ．

(2)　３枚が色も番号もすべて異なる確率を求めよ．

(3)　３枚のうち赤いカードがちょうど１枚含まれる確率を求めよ．

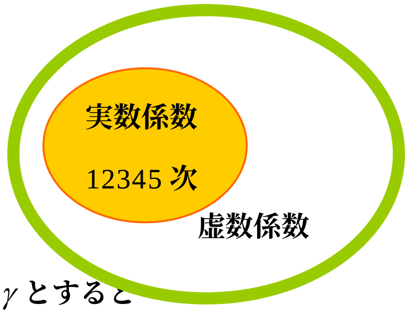
(4)　３枚の中にある赤いカードの枚数の期待値を求めよ．

■整式

整式の変形には　展開と因数分解と A＝BQ＋Rの形にすること．

剰余に関する問題は　恒等式　A＝BQ＋Rで解決できる

■高次方程式の解は特に根ともいう



◇　「ｎにはｎを」複素数係数のｎ次方程式は

複素数の範囲にｎ個の解を持つ（代数学の基本定理）

$\boxed{\text{例}}$３次方程式は[　３　]個解を持つ

◇　解と係数の関係を使うと劇的に解決される．

$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0, b, c\in C)$ の３解を α,β,γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$\boxed{\text{問題}}$３次方程式 $x^3+6ax+b=0$ が $a+3i$ を解にもつとき，実数 a,b の値と実数解を求めよ．

◇　特に<u>実係数のｎ次方程式は</u>「共役ペアー」虚数 α が解ならば共役な $\overline{\alpha}$ も解である

実係数の３次方程式が $1+2i$ を解に持つとき，［$1-2i$］も解、あと１解は実数解

$\boxed{\text{例}}$実係数の３次方程式は必ず１実数をもつ　$(x-$実数　$)$（２次式）＝０の形

２重解，３重解，　異なる３実数解，　整数解条件などへ

１実解は簡単にして，さらに２次方程式の解の分離へ　解の分離

$\boxed{\text{問題}}$　$f(x)=x^3-(a+3)x^2+3(a+2)x-2(a+4)$ のとき，

$f(x)=0$ が互いに異なる３つの正の解をもつときの a の値の範囲を求めよ．

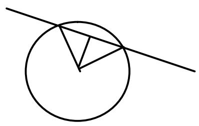
「関連」４次，５次の相反方程式ｎ乗根ａ　$\sqrt[n]{a}$　，ａ（$\in C$）のｎ乗根・$x^n=a$ の根

■図形と方程式

◇円の一般形・標準形・円になる条件

◇円の接線の公式　一般の２次曲線での公式

接点 T の座標はベクトル的手法 $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT}$ が有効



◇　平行移動・点対称・線対称

◇　円と直線の弦の長さはピタゴラスの定理から

１点と直線との距離の公式　$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\boxed{\text{問題}}$　①円 $x^2+y^2=9$ 上の点 $(2,-\sqrt{5})$ における接線の方程式を求めよ．

②円 $x^2+y^2=5$ に点 $A(3,1)$ からひいた接線の方程式・接点を求めよ．

③直線 $l:2x-3y+4=0$ に関する，点 $A(3,1)$ の対称点 B の座標を求めよ．

④異なる二つの円 $x^2+y^2+mx+6y-m-2=0$，$x^2+y^2+2x+2my-4=0$

の２つの交点を結ぶ弦の長さが２のとき，m の値を求めよ．

■ 軌跡と領域

◇　(X,Y) と置く，　なくす文字と残す文字，　変域に注意

◇　領域における最大最小のパターン　境界は円　２次元絶対値　領域に文字も

$ax-y$ =k（傾きが文字で場合分けがいる直線群）　x^2+y^2=k（点との距離の 2 乗）

$\dfrac{y-1}{x}$=k　（点との傾き）　ダイレクト法

$\boxed{\text{問題}}$　点 (x,y) が不等式 $(x-3)^2+(y-2)^2\leq 1$ の表す領域上の点を動くとする．このとき，

(1) x^2+y^2 の最大値　(2) $\dfrac{y}{x}$ の最大値　(3) $10x+10y$ の最大の整数値　を求めよ．

◇　曲線群の通過領域の問題　解の分離パラメーターの次数　が　１次　２次　３次

$\boxed{\text{問題}}$　xy 平面上に直線 $l_t : y=(2t-1)x-2t^2+2t$ がある．

(1)　t がすべての実数を動くとき，l_t の通り得る範囲を図示せよ．

(2)　t が $0\leq t\leq 1$ を動くとき，l_t の通り得る範囲を図示せよ．

（方法1）tを主役に　tの関数 $Z(t)=F(t,x,y)$ のt軸との交点の存在条件

（方法2）ほうらく線とは　曲線群すべてに接する曲線のこと（Envelope）
　　これより通過領域を考える

（方法3）１変数固定　$x=x_0$　として　$y=F(t)$ の値域を求める

（方法4）　接線群（接直線　接曲線）であることを示す　　平行移動曲線群

■三角関数　（円関数ともいう：単位円で定義）

◇　単振動合成の公式（ＳＯＳの公式）　と　方程式・不等式・グラフ

① $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表すと[　$2\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})$　]

[裏技] $(\cos\theta,\sin\theta)$ と $(-1,\sqrt{3})$ の内積から $-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\cdot 1\cdot\cos(\theta-120°)$
　のMax.Minを捉える

② $f(\theta)=\cos\theta+\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})+1$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に（加法定理から角を揃えてから）．

③ $F(x)=A\cos^2 x+B\sin x\cos x+C\sin^2 x$ を $r\sin(2x+\alpha)+p=r\sin 2(x+\dfrac{\alpha}{2})+p$ の形に

$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$，$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

次数下げ公式（半角の公式）で 2 次→１次に「頻出」

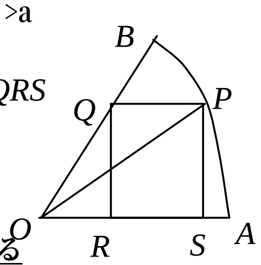
$y=r\sin(2x+\alpha)$　，　$r\sin(2x+\alpha)$=a　，　$r\sin(2x+\alpha)$>a

④応用問題からテーマ③を構成する

☆$\boxed{\text{問題}}$　図のような中心角 $60°$ の扇形 OAB に内接する長方形 $PQRS$ を考える．なお，$OA=1$ とする．

(1)　$\angle AOP=\theta$ とするとき，RS の長さを θ を用いて表せ．

(2)　長方形 $PQRS$ の面積 S の最大値とそのときの θ を求めよ．



◇　実数解の個数の問題　文字係数 a を含む形で出題　<u>角をそろえる</u>

三角・指数･対数などの複雑なもので　置き換えで<u>易しい２つの関数・グラフに帰着</u>

$y=f(\theta)$ のグラフ　$\boxed{\text{難}}$

$t=\sin\theta$（θ の範囲）のグラフ　$\boxed{\text{易}}$　と　$y=g(t)$（$-1\leq t\leq 1$）のグラフ　$\boxed{\text{易}}$

$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$（$\theta$ の範囲）と $y=g(t)$（$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$）のグラフ

☆$\boxed{\text{問題}}$ aを実数の定数とする．xについての方程式

$$\cos 2x - 4a\cos x - 2a + 1 = 0$$

の$0 \le x < 2\pi$で異なる実数解の個数は，定数aの値によってどのように変わるか.

$\boxed{\text{Hint}}$ 定数分離法　$t^2 - 2at - a = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2a(t + \frac{1}{2})$

$t = \cos x\ ,(0 \le x < 2\pi)$ ‥①と$\begin{cases} y = t^2 \\ y = 2a(t + \frac{1}{2}) \end{cases}$‥② のグラフから分類すると明快

■指数・対数関数　小さい文字を主役にする対数

◇おきかえ→整関数　相加・相乗平均の関係

$t = 2^x + 2^{-x} \ge 2\sqrt{2^x 2^{-x}} = 2)$（$x$の範囲）とy=$F(t)$（$2 \le t$）のグラフ

☆ $\boxed{\text{問題}}$　関数$y = 9^x + 9^{-x} - 2a(3^x + 3^{-x})$の最小値を求めよ.　　区間固定方式

◇ 指数・対数　方程式と不等式　対数方程式の解　文字係数 a を含む形で出題して，底をそろえる log をはずした２次方程式の真数及び底の条件の範囲における解の分離問題となる．底による場合分けは重要

・$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$という前提条件の下で　$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

・$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$　解の分離

$\boxed{\text{対数不等式}}$

☆$\boxed{\text{問題}}$　方程式$9^x + 2a \cdot 3^x + 2a^2 + a - 6 = 0$を満たす$x$の正の解，負の解が 1 つずつ存在するような，定数aの値のとる範囲を求めよ.

$\boxed{\text{問題}}$　xについての方程式$\log_3(x-3) = \log_9(kx-6)$が相違なる２つの解をもつように，実数$k$の範囲を求めよ.　　グラフに帰着

■ 微分

◇接線の問題　[定義]共通接線⇔$\begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$　引ける接線の数（key は変曲点）

$\boxed{\text{問題}}$　$y = x^2$と$y = x^3$の共通接線の方程式を求めよ.

◇ 引ける接線の数

[知得]その曲線と漸近線と変曲点における接線を境界として場合分けになる

$\boxed{\text{問題}}$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$　に対して　点$(0,k)$から曲線$y = f(x)$に引くことができる接線の本数をkの値によって調べよ.

◇文字３次方程式･関数の問題　場合分け

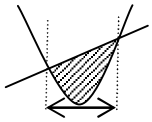
◇極値の分離問題　ｙ’のグラフの形状に帰着　解の分離

☆$\boxed{\text{問題}}$　関数 $f(x)=-2x^3+3ax^2-3a+12$（a は正の定数）があり，この極小値は正である．
（１） $f(x)$ の極小値を a で表せ．また，a のとりうる値の範囲を求めよ．
（２）$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，$M(a)$ を a で表せ．
（３）（２）で求めた $M(a)$ について，$M(a)=k$ となるような a がただ１つ存在するとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ．

■ 積分

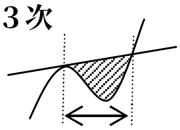
◇　積分方程式　直線（接線）と放物線で囲まれた部分の面積の色々な６３公式
面積の最小値に相加・相乗平均の関係を利用する問題　　　（最高次の係数 a）と幅で決まる量

２次



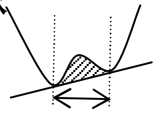
$S=\dfrac{|a|}{6}\text{幅}^3$

３次

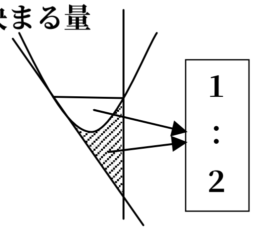


$S=\dfrac{|a|}{12}\text{幅}^4$

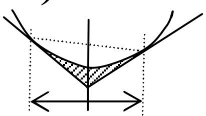
４次



$S=\dfrac{|a|}{30}\text{幅}^5$

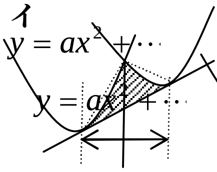


ア

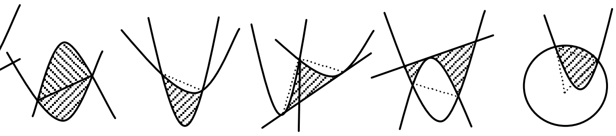


$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

イ



$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$



アイ $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{|a|}{6}\text{幅}^3$　，　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　，$\int (x-\alpha)^n dx=\dfrac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$

$\boxed{\text{アで接線が x 軸であるケースが見抜けるかがポイント}}$

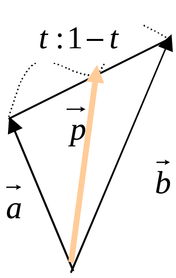
☆$\boxed{\text{問題}}$　放物線　$C: y=x^2$　上の点 $P(t,t^2)$ $(t>0)$ における C の接線と直交し P を通る直線を l とする．C と l で囲まれる部分の面積を S とする．次の問に答えよ．
(1) l の方程式を求めよ．
(2) S を t の式で表せ．
(3) t が $t>0$ の範囲を動くとき，S の最小値とそのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\text{問題}}$　２つの曲線 $y=x^2$ •••①　$y=x^2-4x$ •••②　の共通接線を l とする．
(1) 共通接線 l の方程式を求めよ．
(2) 曲線①と l の接点　および　曲線②と l との接点　の x 座標を求めよ．
(3) ２つの曲線①と②および l で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

☆$\boxed{\text{問題}}$　放物線 $C: y=x-2x^2$　と，C 上の点 $P(t,t-2t^2)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$t>0$ とする．
(1)点 P における C の接線 l の傾きが正であるような t の値の範囲を求めよ．
(2)(1)の t について，C，l，および x 軸で囲まれる図形の面積が y 軸で 2 等分されるような t の値を求めよ．

■平面ベクトル・空間ベクトル

◇　交点ベクトル問題とメネラウスの定理（コンニャクに串）
角の二等分線の定理とひし形，垂線：垂直条件は内積＝０
◇　いろいろなアプローチの方法が　　和とスカラー倍だけで
メネラウス直線のベクトル方程式（１点と方向ベクトル）



$t:(1-t)$　分点公式は$\dfrac{\text{タスキがけ}}{\text{比の和}}$(外分は一方をマイナスにして適用)

図の$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a},\vec{b}$で表せ.［　　　　　　　　　　　　　　　　］

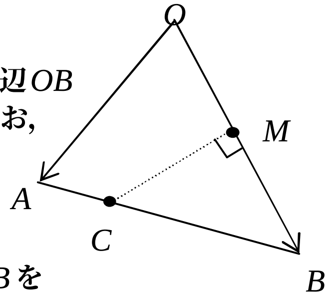
◇　**ベクトルの大きさとなす角　なす角は計算しやすいベクトルで**

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\cdot\cdot\cdot\cdot$，$\cos\theta=\dfrac{\vec{\Delta}\cdot\vec{\Diamond}}{|\vec{\Delta}||\vec{\Diamond}|}=\cdot\cdot\cdot\cdot$

◇　**垂直⇔内積＝0**

◇　**面積　面積比　体積　体積比**　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，　$V=\dfrac{1}{3}Sh$

☆問題垂直→交点→面積



問題

三角形OABがあり，$OA=3$，$OB=4$，$\angle AOB=60°$とする．また, 辺OBの中点をMとし，辺AB上に点Cを$CM\perp OB$となるようにとる．なお, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とする.

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ.

(2) ベクトル$\overrightarrow{OC}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ. さらに線分の長さの比$AC:CB$を最も簡単な整数比で表せ.

(3) $\angle AOB$の二等分線と辺AB，線分CMとの交点をそれぞれD,Eとする.
ベクトル$\overrightarrow{OE}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．このとき，三角形CDEと三角形OEMの面積の比を最も簡単な整数比で表せ.

問題　正四面体$OABC$の辺ABを$3:5$に内分する点をK，辺OCを$3:4$に内分する点をL，線分KLの中点をMとする．さらに，直線CMと平面OABの交点をNとする．

このとき，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として，以下の問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{KL}$および$\overrightarrow{OM}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{ON}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ.　(3) $\cos\angle CON$の値を求めよ.

■ 空間図形の顔　ベクトル・媒介・デカルト

◇共線条件・共面条件は指先でいくか指でいくか，成分でいくか

直線　$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}$ 媒介変数表示，$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$

平面　$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，$\vec{p}=u\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$　$(u+s+t=1)$

平面　$\vec{x}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}$ 媒介変数表示

平面　$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0$，$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}=0$，$ax+by+cz+d=0$

球面　$|\vec{x}-\vec{c}|=r$，$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$，$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

◇　垂線の足を求める問題　　直線への垂線と平面への垂線　$\vec{n} \perp \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases}$

　$\boxed{\text{方法１}}$　大きさの最小値を２次関数の・・・，$\boxed{\text{方法２}}$　最小といえば　垂直（内積＝０）

◇　ベクトルの外積の計算

$\boxed{\text{問題}}$ ３点 $A(1,-4,1)$，$B(0,-3,3)$，$C(0,-4,2)$ がある．次の座標を求めよ．

(1)直線 AB に原点から下ろした垂線の足 H　(2)平面 ABC に原点から下ろした垂線の足 K

◇　空間図形

直線の方程式の横綱　１点と方向ベクトル　$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$

平面の方程式　１点と法線ベクトル　$ax+by+cz+d=0$

球面の方程式　中心と半径　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$\boxed{\text{問題}}$空間図形の位置関係の問題

１点　$P(1,2,0)$，

直線　$l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{4}$　，$m:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

平面　$\alpha: x-y+2z=1$，$\beta: x+y+z=1$，

球面　$S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$

①１点と直線との距離　垂線の足　②１点と平面との距離(公式)　垂線の足

③２直線のなす角　最短距離　交点　④２平面のなす角　交線

⑤直線と平面の交点　なす角　垂線の足⑥平面と球面の交円（交円の中心・半径・面積）

■ 数列

２つ以上与えそれから

◇等差と等比の一般項と部分和の公式

◇①整式列はΣの公式　②等差＊等比型の和はＳ－ｒＳ　③$a_n=$ F(n+1)－F(n)

$\sum_{k=1}^{n}(1+k+k^2)$　　$\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}$　　$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$

◇Σで添え字をやや複雑に与えて混乱させる問題

シグマをはずす，だらだら書いたら見えてくる．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-(k-1)}=a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k a_{k+1}}+\frac{1}{2b_k-6}\right)$$

◇漸化式はパターン分類

①$a_{n+1}=pa_n+q$　は必須　$a_{n+1}=2a_n-3$　，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$

②$a_{n+1}=a_n+f(n)$　$a_{n+1}=a_n+2^n$

③$a_{n+1}=pa_n+f(n)$　$a_{n+1}=3a_n-2^n$　，$a_{n+1}=3a_n+4n$

④S_n と a_n を含む漸化式　$S_n=3a_n-n$

⑤$a_{n+1}=f(a_n)$

⑥積型　⑦連立　⑧その他

☆$\boxed{\text{問題}}$　等差数列$\{a_n\}$のn項の和をS_nとするとき，$S_{10}=175$，$S_{15}=375$を満たす．

数列$\{b_n\}$は，$b_1=5$，$b_{n+1}=2b_n-3\ (n=1,2,3,\cdots)$　を満たしている．

(1) a_nを求めよ．(2) b_nを求めよ．(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k+\frac{1}{a_ka_{k+1}})$を$n$を用いて表せ．

◇　群数列は群番号・群個数・通し番号　一般の部分を書き込み思考錯誤せよ

$\boxed{\text{問題}}$　数列　１２２３３３４４４４５５５５５６・・・・・・・について

(1)第５０項目　(2)５０項目までの和　を求めよ．

◇　数学的帰納法の原理を理解し，何を証明すればよいかその式の書き出しが大切

$\boxed{\text{タイプ例}}$ $\begin{cases} P(2):\text{真} \\ [P(k)\to P(k+1)]:\text{真}\quad (k=2,3,4,\cdots) \end{cases}$ $\Rightarrow\quad P(n),(n=2,3,4,\cdots)$：真

かなり複雑な命題の証明問題が出る．ごまかしはしない．

＜帰納法による証明法＞

○ $p(k)\ (k=1,2,3,\cdots)$の証明（難）を「$p(k)\Rightarrow p(k+1)$」の証明（できないかもしれないが一般に易である）に帰着できることがある．つまり　前提条件と$p(k)$ から$p(k+1)$を導く（易）または，$p(k+1)$を　前提条件と$p(k)$ を用いて証明する．（最も易）

これが不可能なら「p(k)∧p(k+1)⇒p(k+2)」の証明など他のパターンで可能な事もある．

○漸化式の帰納的方法による解法

予想を帰納法で証明するときの帰納法のタイプは漸化式で決まる。

○「$n\in N$ ： $p(n)$」、「$\forall n\in N: p(n)$」の違い判りますか

例「$n\in N$ ：$n>2$」は$n=3,4,5,\cdots$で真となる条件命題

「$\forall n\in N: n>2$」は全称命題で偽の命題

「$\exists n\in N: n>2$」は存在命題で真の命題

「$\forall n\in N: p(n)$」は全称命題、「$n\in N$ ： $p(n)$」は自然数に関する条件

「$n\in N$ ： $p(n)$」と「$n\in N$ ： $p(n)\to p(n+1)$」はまったく違う条件

①「$\forall n\in N: p(n)$」と②「$\forall n\in N: p(n)\to p(n+1)$」は違う全称命題

①が真である事の証明が②に帰着されるというのが帰納法による証明

だから$n=k$のとき$p(k)$がなりたつと仮定すると

$n=k+1$として$p(k+1)$も成り立つという論法は①を使ったことになり誤り

②の$\forall n\in N:$は：「$p(n)\to p(n+1)$」全体にかかる

□いろいろな証明法

＜対偶による証明法＞

「$p\to q$」の証明（難）を「$\overline{q}\to\overline{p}$」の証明（易）に置き換える．

＜背理法による証明＞

<u>否定的に定義された命題の証明</u>に有効　　２重否定は肯定で処理がし易い→矛盾を導く

$\boxed{\text{例}}$　無理数＝有理数でない　→　有理数と仮定すると矛盾

一次独立＝同一直線（平面）上にない→同一直線（平面）上にあると仮定すると矛盾

非正則＝逆行列がない　→　逆行列があると仮定すると矛盾