2次試験直前総まとめ

旧7帝大の数学レベルをしっかり予想して本番に堂々と臨め。記述数学の重要テーマ　これだけは意識して本番に臨もう。1問出れば合格！あとは試験会場で頑張る問題でどうしようもない。

一般――――――――――――――――――――――――――――――――――――

- 同じ問題は基本的にでない。模擬テストと違って大学側は遠慮しない。差をつけるために各分野のテーマの最も難かしい新作のオリジナルな部分を出してくる。
- 無意味に難しい問題は出ない。同一テーマなかでの難しいものが出る。
- できるところを解いていく（制限時間内ではすべて解けるはずがない）
- 一般では考えないこと、とことん具体的に考えて、一般化する。（N=3，４として・・・）文字を含むもの，わけの判らぬものも、平凡にできるものの一般化である。
- 式の変形とグラフ・図で相互に試行錯誤。一つの方法に拘らないで水平思考を。
- 答案の書き方で随分ともらえる点は違う。2 次は論理力をみる。数学とは、その答案とは何かを知っていないとだめ。

数論　論理　――――――――――――――――――――――――――――――――

1 整数論･論証 のキーワードは，互いに素 と 素数

背理法･対偶で証明，素数，初等整数論の基本定理（素因数分解の一意性）

例　A，Bが整数で,３＊A＝５＊B　⇒　Aは５の倍数，Bは３の倍数

● 数学的帰納法の原理 (十分性の証明) はマスターしておく

- ･<かなり複雑な式の証明が出題されると覚悟しておくこと>　阪大
- ･整数に関する命題の証明を数学的帰納法ですればいいことに気付くかどうか
- ･証明のコツは　$P(1), P(k), P(k+1)$ の書き出しにある　$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ の証明
- ･変形パターンも出ます。帰納法による証明の構造をつかむこと (漸化式の帰納的方法と帰納法による証明は重要)

● 数学は同値性の学問同値変形，必要条件･十分条件，同値性の判定のコツ

①「p→q」は$P \subset Q$のこと「pならば例外なくq」と読めば明解

②　矢印が出ていく方が十分「出発十分前」と覚える．ならばで得られるものは必要条件

③　領域P,Qを考える　④　同値とは表現は違うが内容は同じということ

数列――――――――――――――――――――――――――――――――――――

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \quad のとき,\quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k$$

（意味１）　階差数列の和$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k$が求まるとき　一般項は求まる。

（意味２）数列がΔa_nが$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$の形に書けるとき　その和は求めることができる

差分って何ですか　　微分・積分（連続）と　差分・和分（離散）

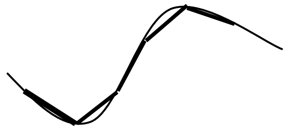
「$\{a_n\} \Leftrightarrow n \in N : a_n = f(n)$」数列は関数である．階差をとることを差分するという

[Def]　差分$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \dfrac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n}$　差分の定義

これは微分$f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$（1 点における傾き）が連続量である

のに対し　離散量の　幅 1 毎の傾き（増分）が差分と考えられます。

[Def]　和分　$f(n) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\{f(k+1) - f(k)\}$　和分の定義



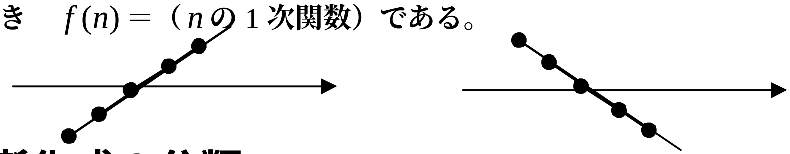
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$　←対応→　$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta f(k) = f(n) - f(1)$

積分リーマン和 $\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{\int_a^b f(x)dx} = F(b) - F(a)$

$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta f(k)1 = f(n) - f(1)$　刻々の変化の寄せ集めが全体の変化

微細な部分の寄せ集めが全体

● 数列とは、N から R への関数．よって $f(n) = a_n$ としてグラフをイメージすること。
特に等差数列のとき　$f(n) =$（n の 1 次関数）である。



●――― 数列の漸化式の分類 ―――

パターン化されたものの文字係数に注意　複数の規則で定義された数列
階差、　A n と Sn、　連立　などと　**パターン化されないもの**

●特に $a_{n+1} = f(a_n)$ 型漸化式の問題が重要

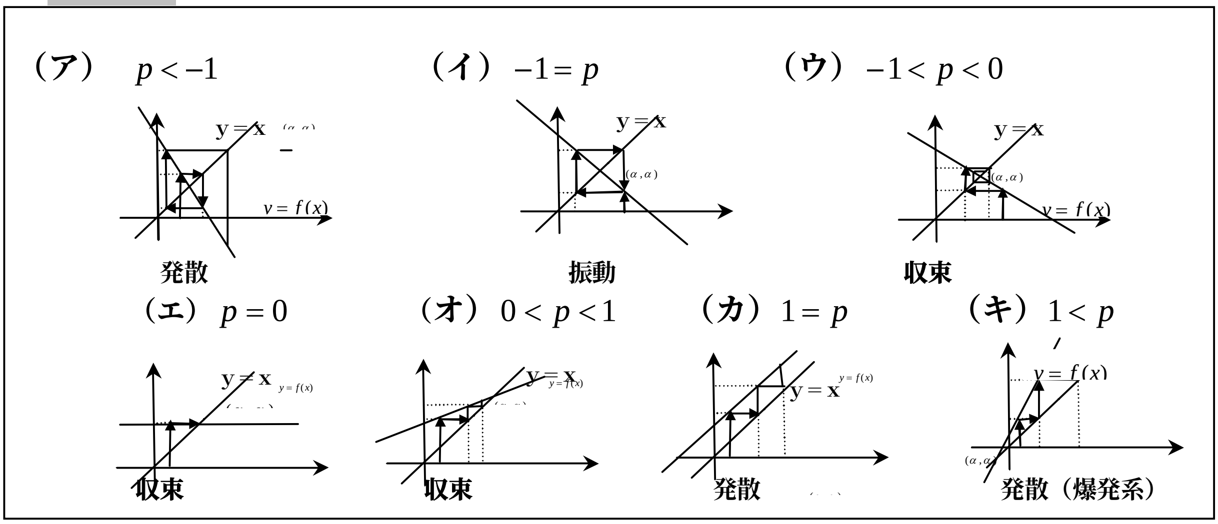
①平衡値は引く　②ハサミウチ論法による極限の証明　　**周期点の問題**

☆ $a_{n+1} = pa_n + q$ の a_n が定まる様子　$\alpha = p\alpha + q$　　$\alpha = \dfrac{q}{1-p}$　として $(p \neq 1)$

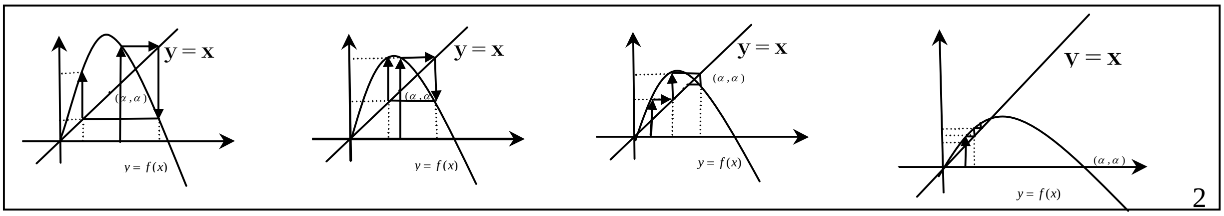
$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ に変形　　$\{a_n - \alpha\}$ は公比 p の数列

$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$　　　$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha \;\to\; \alpha \quad (-1 < p < 1)$

くもの巣



☆ $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$　1 周期点＝平衡値＝バランスバリュー＝不動点,　　2 周期点,・・・・



●――― 極限のいろいろな問題パターン ―――

（ｉ）不定形の極限値と等式変形　不定形は有限確定部分へ分解

① 三角関数の基本極限　② e の定義の形に　③その他変形　④ ロピタルの定理
⑤ 区分求積法へ　⑥ 平均値の定理利用　⑦ 微分の定義へ

（ii）ハサミウチ論法の手法は頻出

誘導で「不等式の証明問題」→「極限を求める」というパターンでは確実に
「ハサミウチの原理」を使うことを示唆している

ハサミウチ論法で用いる $\boxed{b_n \le a_n \le c_n}$ または $\boxed{h(x) \le f(x) \le g(x)}$ の具体例
その後（ｉ）等式変形で $b_n \to \alpha \ \wedge \ c_n \to \alpha$ を示し $a_n \to \alpha$ と結論する

① 二項不等式を利用し $\lim_{n\to\infty} nr^n$ は　はさみうち論法へ（★等差＊等比型の和と極限）

$-1 < x < 1$ のとき，
$$\boxed{0 < n\,|\,x\,|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \le \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

② マクローリン展開から得られる不等式を利用し $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ をはさみうちで求める

$$\boxed{0 < \frac{x^2}{e^x} < \frac{x^2}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3}} \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

③ 解けない漸化式の極限値を求める問題
$a_{n+1} = f(a_n)$ 型漸化式の平衡値 α に対し $\lim_{n\to\infty} |\,a_n - \alpha\,| = 0$ をはさみうちで求める

$|\,a_{n+1} - \alpha\,| < k\,|\,a_n - \alpha\,|\ (0 < k < 1)$ の形に変形　（平衡値はひく）
←これにはいろいろな方法がある　「平均値の定理を使わせることもよくある」
さらに $\boxed{0 < |\,a_n - \alpha\,| < k^{n-1}\,|\,a_1 - \alpha\,| \underset{n\to\infty}{\to} 0}$

①②③はハサミウチではなく　収束の定義そのもの　と考える方がよい。
つまり、ハサミウチとは　b_n　c_n　とも定値ではなく　n の式である場合である。

④ 階段図形のハサミウチ　**調和数列　一般調和数列**
(区分求積法とは関係ない)

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$ **の表す量の表現＝階段図形の面積量**　S_∞ はハサミウチ

一般的に $\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx < 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^\alpha} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx}$

⑤ 関数値の差を***平均値の定理***からハサミウチ　さらに $\lim \sum$ を区分求積法へ

$(\frac{k+1}{2n})^{100} - (\frac{k}{2n})^{100} = \frac{1}{2n}100c^{99} \quad (\frac{k}{2n} < c < \frac{k+1}{2n})$ より

$$\boxed{\frac{1}{2n}100(\frac{k}{2n})^{99} < (\frac{k+1}{2n})^{100} - (\frac{k}{2n})^{100} < \frac{1}{2n}100(\frac{k+1}{2n})^{99}}$$

$$\sin\frac{k+1}{2n}\pi - \sin\frac{k}{2n}\pi = \frac{\pi}{2n}\cos c \,,(\frac{k}{2n}\pi < c < \frac{k+1}{2n}\pi)$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2n}\cos\frac{k+1}{2n}\pi < \sin\frac{k+1}{2n}\pi - \sin\frac{k}{2n}\pi < \frac{\pi}{2n}\cos\frac{k}{2n}\pi}$$

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$
$(a < c < b)$
の　$(a < c < b)$ の部分の不等式
でハサミウチ

⑥ ガウス記号を含む極限は　$0 \le x-[x] < 1$　より　$x-1 < [x] \le x$

$\Delta - 1 < [\Delta] \le \Delta$　から　, [ ]を含む部分をハサミウチ

例　$n \in N$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{[2n^2 - k^2]}{n^2}$,　$\lim_{n\to\infty} a_n$

⑦ 定積分で定義される数列は、積分漸化式　や　積分不等式を駆使してその極限や部分和の極限を求める。

例

⑧ 定積分や不定積分で表現される数列の部分和の収束発散問題

例

(iii) 無限大･無限小のオーダー比較問題

n のどの程度のオーダーで増大するかに注目する。例えば、多項式的に増大するか、指数関数的に増大するか、もし多項式的に増大するならば何乗ぐらいのオーダーで増えるか、・・・等に注目する。

$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}$ を基本となる極限として　$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n$　や　$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}}$　でオーダー比較

(IV) 場合分けの必要な極限　$\lim_{n\to\infty} r^n$　の形は基本　場合わけの境界は　$r = \pm 1$

●重要な級数の収束の問題　誘導式の総合問題の形で出題される

①調和級数　$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$　(∞)　階段図形

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

②一般調和級数　$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \cdots$　ゼータ関数 $\xi(\alpha)$ $(\alpha > 1)$

③メルカトール級数　$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$　（$\log 2$ に収束）

④ライプニッツ級数　$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$　（$\frac{\pi}{4}$ に収束）

⑤　$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$　（e に収束）

級数は部分和の極限で定義される（by コーシー）
等比数列の和（易）の公式→両辺積分して S_n が得られる→積分不等式で挟む
→はさみうち論法で級数の極限を論ずる

図形と方程式―――――――――――――――――――――――――――――――

● 軌跡を求めたい点は (X,Y) とおくとはっきりする。

なくす文字（パラメーター）と残す文字を明確に意識、最後に変域を。

例 2直線や2曲線 $f(x,y,a)=0, g(x,y,a)=0$ の交点の軌跡は、交点を $P(X,Y)$ とおく

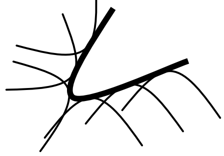
$$\begin{cases} f(X,Y,a)=0 \\ g(X,Y,a)=0 \end{cases}$$

パラメータ a を消去して，　X, Y だけの関係を求める。

これが交点の軌跡の方程式である

● 包絡線

[Def] 曲線群$\{C_\alpha\}$が与えられたとき、すべてのC_αに接する曲線Cを曲線群の包絡線という。

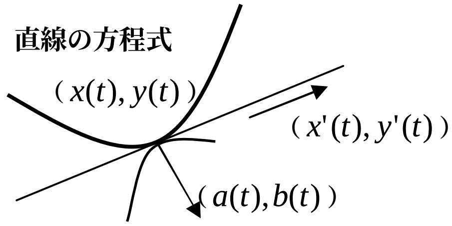


[公式] 曲線群$\{C_\alpha\}$が方程式$f(x,y,\alpha)=0$で与えられているとき

包絡線は$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$ からαを消去した式で与えられる。

[説明]接点が$(x(t),y(t))$であり　$a(t)x+b(t)y+c(t)=0$ ････① 直線の方程式

とおくと



$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a(t)x'(t)+b(t)y'(t)=0 \quad ････② \text{ 垂直条件} \\ \text{この直線上に}(x(t),y(t))\text{があるので} \\ a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0 \quad ････③ \text{ 接線上の点であることの定式化} \end{cases}$

tの恒等式を微分して$a'(t)x(t)+a(t)x'(t)+b'(t)y(t)+b(t)y'(t)+c'(t)=0$　③‘

③‘と②より$a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0$　④

ゆえに$\begin{cases} a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0 & ③ \\ a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0 & ④ \end{cases}$　(これは　＊の必要条件)

$(X,Y)=(x(t),y(t))$をもとめれば包絡線の媒介変数表示が得られる。

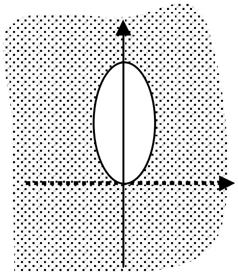
③④からtを消去して包絡線の方程式を得る

[類似]　恒等式を微分して新しい関係式を取り出すテクニック

ｉ)　$\forall t: f(t)=g(t) \Rightarrow \forall t: f'(t)=g'(t)$，ii) $f(x)$が$(x-a)^2$で割り切れる$\Leftrightarrow f(a)=0 \wedge f'(a)=0$

3 曲線群の通過領域の問題は、パラメーターの実数条件より

例　直線群$ax+(1-a^2)y=3$の通過領域



(解法1) パラメータaの実数条件から方程式の解の分離問題に帰着

$ya^2-xa+3-y=0$　ア) $y\neq0: x^2-4y(3-y)\geq0$　イ) $y=0: x\neq0$

(解法2) 包絡線を求め　さらに　通過領域を

$\begin{cases} ax+(1-a^2)y-3=0 \\ 1x+(-2a)y+0=0 \end{cases}$ より、$y\neq0: \dfrac{x^2}{2y}+(1-\dfrac{x^2}{4y^2})y-3=0$，

$y\neq0: x^2+4y^2-12y=0$　が包絡線　$y=0:$なし

直線群の通過領域の問題は
なんきんたますだれ
南京玉簾

(解法３)1 変数固定方式（ファクシミリ方式）

横座標$x=x_0$と固定して，縦座標をaの関数$y=\dfrac{x_0a-3}{a^2-1}$の値域を求める。

例 $y=-\dfrac{t}{2}x+\dfrac{t^2}{2}$　$(t\geq0)$　，$x=X$とおく

(解法 4)　直線群(曲線群)が定点通過のケース

直線群が接線群のケース

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$　の形の直線群は　$y=f(x)$の接線群である

平行移動曲線群　y＝f(x)　に対し　y－q＝f（x－p）の形

接曲線群を見つける　連立させて完全平方を

ベクトル――――――――――――――――――――――――――――――――――――――

- ベクトルはまず基底を意識せよ。そして、話題の部分を基底で表わす
- 交点ベクトル問題

  （三角形の傍心、角の **2 等分線の交点→ひし形**）（神戸）

  円　と　角の2等分線　の交点ベクトル問題　から球と直線の交点へ予想
- 幾何の問題　①道具としてのベクトル　②座標設定してとく　③対称性に留意

  ④四面体の平行六面体への埋め込み　特に　等面四面体（合同）の直方体への埋め込み

確率――

文字・一般で新しい規則性を厳密にするために長くなった問題文ででる

[コツ]具体的なレベルで規則性を捕らえるしか方法はない,決して難しくしてしまわないこと

- [基本]**まず　サイコロ２個・３個問題ではないかと疑え**

  ジャンケン（グチパさいころ）や変形サイコロ　**6×6表が基本**

  一見違うようでも、直積空間で同様に確からしい根元事象を捉える問題を見抜け

- **同じものを含む確率は異なると見る　[超重要]**　赤球・白球問題、順列の確率

- **△の期待値の求め方　のコツは**

  ①　△を認識し**即　確率分布表へ**　和＝1で確認

△		計
確率		1

  ②　**和の平均は平均の和**　$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

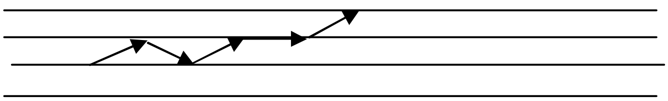
  $E(aX+b)=aE(X)+b$　**の利用も**

- **最短経路の数の楽な求め方**

  和の法則から　数える方法も知っておく

- **確率過程（時系列）の問題は推移の様子を図示し、思考する**

  「対称性のある問題は，対称な事象をまとめて考える」



- **同じものを含む確率は異なると見る　[超重要]**　赤球・白球問題、順列の確率

3　確率漸化式・場合の数漸化式

n+1 回目を n 回目の関係から　（コツをつかむ）

n 回目　　　　　　n+1 回目

p_n →　p_{n+1}

$1-p_n$ ↗

漸化式を作る有名な話題として　①階段の上り方　②平面を n 本の直線・円で分ける

③ハノイの塔　④フィボナッチ数列とウサギ算

微積――――――――― [start] lim　限りなく近づく論法――――

不定形　を認識すること

重要な極限　π　e　と　BIG3

極限で定義される　級数・微分・積分　の学問が解析学

定義　$\boxed{新} \overset{def}{=} \lim$ 易

収束性の証明はハサミウチで

性質　$\boxed{新}$**が一人歩き**

- 極限は存在するとは限らない　● 極限は収束しないと意味がない
- 様々な極限記号の定義を知っているかを試す問題

◎ **微分の定義**　$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき，その極限値を $f'(x)$ と書く

← **平均変化率の極限**（あるとは限らない）

$\boxed{例}$定義により $f(x)=\cos x$ を微分せよ。

$\boxed{例}$ $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin^2(x+h)-\sin^2 x}{h} \overset{byDef}{=} f'(x)=2\sin x\cos x$

連続の定義　$f(x)$ が $x=a$ で連続 $\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つ　a **への極限**で定義

$\boxed{例}$　$x=a$ を境界とする関数のこの点における連続性・微分可能性の判定問題

◎ **級数の定義**　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ が収束するとき，その極限値を $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ とかく（**コーシー**）

← **部分和の極限**（あるとは限らない）

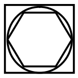
[注意]　記号 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は i）形式的級数と　ii）収束する場合のその和　の2通りの意味に使い分けられるので混乱する

e　の定義　$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ ＝2．71828‥‥ に収束する。この極限値を e かく

$\boxed{例}$　$\lim_{h\to 0}(1-h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{-h\to 0}(1+(-h))^{\frac{1}{-h}(-1)}=e^{-1}$

[なるほど]霊界用語（天国、地獄）があるように、極限用語があるんだ
（微分　積分　連続　級数　e　π）

π の定義　$\dfrac{円周の長さ}{直径}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{正n角形の周の長さ}{正n角形の外接円の直径}$ ＝3．1415･･･に収束する。

この極限値をπとかく← 円周の長さは正多角形の周の極限で  より $3<\pi<4$

◎ **積分の定義**　← $f(x)$ の $[a,b]$ での**リーマン和の極限** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)\Delta x_k$ が収束（存在する）とき、

その極限値を $\int_a^b f(x)dx$ という記号でかくさらに、

[Def]　①閉区間 $[a,b]$ で関数のリーマン和の極限が有限確定値として存在するとき

積分可能といい、その値を定積分と定義しその極限記号を $\int_a^b f(x)dx$ とかく．

[Th.]　閉区間 $[a,b]$ で連続な関数は積分可能である

[Th.]　②さらにこの値が原始関数で楽に求められることを発見した．

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ である（微積分学の基本定理）

$\int_a^b f(x)dx \overset{th.}{=} G(b)-G(a)$，$G'=f$　である（ニュートン：微積分学の基本定理）

[あのね]「微分のことは微分でせよ。積分も微分でせよ。」

[覚え方]「平均変化率の極限は微分、リーマン和の極限は積分　部分和の極限は級数」

$$\boxed{\text{リーマン和}}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{①} \boxed{\int_a^b f(x)dx} \overset{②}{\overset{th.}{=}} G(b)-G(a)\ ,\ G'=f$$

<u>（幅内の値の関数値）*幅　</u>の和の形　を見抜き積分へ

特別なケースとして $f(x)$ が$[0,1]$で連続のとき、$\Delta x_k=\dfrac{1}{n}, c_k=\dfrac{k}{n}$ としたリーマン和も収束

$$\boxed{\text{リーマン和}}\frac{1}{n}\left\{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdot\cdot\cdot\cdot\ +f(\frac{n}{n})\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 f(x)dx=G(1)-G(0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdot\cdot\cdot\cdot\ +f(\frac{n}{n})\right\}=\int_0^1 f(x)dx$$

区分求積法は「リーマン和の極限」の1つの形よって　積分の定義そのもの

$\boxed{例}$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\pi+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}\pi+\frac{3}{n}\sin\frac{3}{n}\pi+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\pi\right\}\overset{by\ def}{=}\int_0^1 x\sin\pi x dx$$

$\boxed{応用例}$　A）次の連続関数のリーマン和の極限を　面積、体積、曲線の長さ　と定義する

$$f\geq 0\ ;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k\quad ,\quad S\geq 0;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} S(c_k)\Delta x_k\quad ,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\Delta x_k$$

つまり面積$S=\int_a^b f(x)dx$，体積$V=\int_a^b S(x)dx$，曲線の長さ$L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

B）はじめに面積 S(x)があり S'(x)＝f(x)を証明する　（ｆの原始関数であること）

体積 V'(x)=S(x)　　　曲線の長さ L'(x)=$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ も同様

4

●平均値の定理の使い方は，難しい関数値の差を簡単にするために使う

・関数の様々な問題に現れる式に関数値の差を含んでいたら、その部分を劇的に別の表現にしてしまう、これが平均値の定理である.

定義域内の区間で微分可能なら　$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)\quad (a<c<b)$

この a,b の形はかなり複雑な形であることが多く,余程注意していないと気付かない.

$\boxed{例}$　①$\log b-\log a=(b-a)\dfrac{1}{c}\ ,\ (a<c<b)$

②$\log(x+1)-\log x=\dfrac{1}{c}\ ,\ (x<c<x+1)$　より　$\dfrac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x},\ \ (x>0)$

③$\sin\dfrac{k+1}{2n}\pi-\sin\dfrac{k}{2n}\pi=\dfrac{1}{2n}\cos c\ ,(\dfrac{k}{2n}\pi<c<\dfrac{k+1}{2n}\pi)$

[究極の問題？]平均値の定理・区分求積・ハサミウチ論法の融合問題

④$\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^{100}-\left(\dfrac{k}{n}\right)^{100}=\dfrac{1}{n}\cdot 100c^{99},\ \ (\dfrac{k}{n}<c<\dfrac{k+1}{n})$　など　かなりの慣れが必要

● 共通接線は頻出

ｉ）曲線どうしが接する場合　まず接点から［定義＊］ $x=\alpha$で接する ⇔ $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$

曲線と直線が接する　　放物線がx軸と接する（判別式＝０も）　　曲線と曲線が接する

円と放物線が接することの扱い　（大学　曲率半径）

（判別式＝０は注意）　接点での放物線の法線は円の中心を通ることの利用

ii）曲線どうしが接しない場合　　　　　　　　[注意]このケースは接している

iii）曲線どうしが接するかどうかわからない場合　　　　とはいわない[定義＊に反する]

類 **2曲線が直交する** $x=\alpha$で直交する ⇔ $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)\cdot g'(\alpha)=-1 \end{cases}$

● 引ける接線の本数の問題

結果を知っておく，場合分けの境界は，<u>元の曲線</u>と<u>漸近線</u>と<u>変曲点における接線</u>
引ける法線の数問題もある

● **数Ⅱの微積の最重要テーマは**

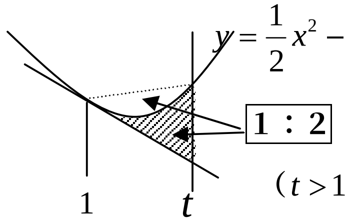
放物線と接線と軸に平行な直線を境界とする面積の公式

文字で出されるので　積分せずに公式で先を読むことがより重要である

$$S=\int_1^t \frac{1}{2}(x-1)^2\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^t=\frac{1}{6}(t-1)^3$$

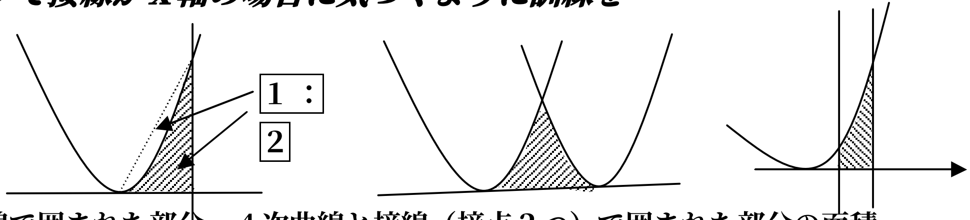
公式では $S=2\times\dfrac{\frac{1}{2}}{6}(t-1)^3=\dfrac{1}{6}(t-1)^3$

$y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+5$



（$t>1$とする）

右図のパターンで接線がｘ軸の場合に気づくように訓練を



● 3 次曲線と接線で囲まれた部分，４次曲線と接線（接点２つ）で囲まれた部分の面積も要注意

● 積分は暗記　このレベルで差がつくのが現実

①難解な積分も所詮　**部分**$\left(\int f'g=fg-\int fg'\right)$**か置換**$\left(\int f(\Delta)\Delta'=\int f(t)dt\right)$**か公式で**

②TABLE で暗記　**例** $\int \log(x+1)dx$，$\int (\log x)^2 dx$，$\int \sin^2 x dx$　などウォリスの公式も

③異なる関数の積の積分・積分漸化式　といえば　部分積分法で
[指数→三角→整関数→対数]の順

④積分に関する等式の証明（周期性　対称性利用）　といえば　置換積分で

● 逆三角関数の微積分も知っておくとパット開ける

$(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C=\theta+C\ (x=\sin\theta)$

$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C=\theta+C\ (x=\tan\theta)$

● **数Ⅲは以下の３つの極限の学問＝解析学である**
級数＝lim（部分和）
微分＝lim（平均変化率）
積分＝lim（リーマン和）

● **定積分で定義された数列$\{I_n\}$の問題**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$ は一般に成立しない。
交換不可能な演算

●区間によって異なる式で与えられる関数は最頻出

① $y = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$ の形

② 2重**絶対値** **2次元絶対値** ,ガウス記号[ ]，小数部分｛ ｝，
周期関数，合成関数

例 $y = || \sin x - \frac{1}{2} | - 1 |$，$y = | x(x+2) | + | x-1 | + 1$，$| \log x | + | \log y | \leq 1$，$y = x^2 + [x]$

5 絶対値の定積分

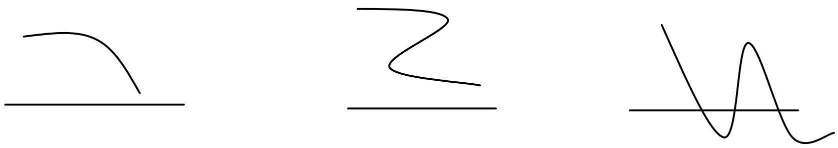
例1 $f(x) = \int_0^x | t - a | \sin t \, dt \quad (x > 0)$

例2 $f(x) = \int_1^e | \log t - x | dt$

場合分けが必然的に現れるようにする ③← ② ← ①

●面積･体積はうまく処理するのに工夫を要するものが出題される

① 等積問題はひっかかるな A＝B⇔A＋C＝B＋C
② 定積分と面積量を関連付ける問題 『微分は接線・積分は面積（符号付面積）』
③ 交点を文字として処理するもの
④ 積分によって計算する部分を極力少なくする
そのために式を立てる段階での工夫と計算段階での工夫を
④ 高校の程度を超える公式を使うもの（パップス・ギュルダン，バームクーヘン）
⑤ 断面積が判れば体積が求まる。(その図形の姿が不明でもよい) z＝t
⑥ 媒介変数表示された関数の場合



媒介変数表示の問題 軌跡 接線･面積･体積･曲線の長さ、位置･速度･加速度

・$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP}$ とベクトルとして求める ［コツ］

・$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ のとき、微分 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$， $dx = f'(t)dt$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \dfrac{g''(t)}{f''(t)}$ は間違い

・2階微分 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2} \cdot \dfrac{1}{f'(t)}$

・積分 $\int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y \dfrac{dx}{dt} dt = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t) dt$

・曲線の長さ，道のり $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$

・位置 $\overrightarrow{x(t)} = (f(t), g(t))$、速度 $\overrightarrow{v(t)} = (f'(t), g'(t))$、加速度 $\overrightarrow{\alpha(t)} = (f''(t), g''(t))$

● $y=\dfrac{\log x}{x}$ の出題率は NO1,　　グラフから応用まで

グラフを描かせて、その形状からの応用へ繋げる問題　グラフといえばすぐ微分は間違い
まず$\boxed{\text{yで描く}}$　その後　y‘　必要に応じy’‘

$y=\log x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ 　を描いてその積として $y=(\log x)\times\dfrac{1}{x}$ を描けば簡単に概形が判る
すべてこのような習慣をつけることが大切です。 漸近線などすぐ予想できます。

● 関数（抽象関数）の分類　　{微分可能}⊂{連続}⊂{積分可能}

関数の定義は　R から R へのどの元にもただ一つ対応する規則
抽象関数はグラフで置き換えられない。

● 微分の定義を使う関数方程式

$\boxed{\text{例}}$ $\forall x,y: f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 　を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+x\right)=\cdots=f'(0)+x$$

微分方程式に帰着

6 積分方程式の分類

定数型は$=k$、関数型は微分して$\int$　をはずす（その前に x を外へ出す）

$\boxed{\text{例}}$　$f(x)=(x^2+1)e^{-x}+\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

$x-t=u$ の置換積分すると $\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt=\cdots=\int_0^x f(u)e^{-(x-u)}du=\int_0^x f(t)e^{-(x-t)}dt$ より

$f(x)=(x^2+1)e^{-x}+e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt$ 　・・・・①の両辺をxで微分して

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}-e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt+e^{-x}f(x)e^{x}$ ・・・・②

①＋②より　微分方程式　$f'(x)=2xe^{-x}$　を得る。

基本は微積分学の基本定理（1 回積分）　応用　2 回積分　合成　x　f(x)　F(x)　F’(x)

● 非回転体の問題

体積･格子点 は　$z=t$　として，xyt 切断平面を考えアプローチする

① イメージするコツはあるのか　　　（難しいことが多い）
② 図をかくコツはあるのか　　　　　（難しいことが多い）
③ 連立不等式で与えられたものは（1 番複雑な変数）z＝t として 2 次元化（z＝t は学習指導要領にある）

● 空間図形（非回転体・回転体）の体積

3

基本は　体積＝$\int$ 断面積

[出題される背景]　学習指導要領に $Z=t$ なるキーワードがある。

	非回転体	回転体
図がイメージされるもの	断面積の計算が単純になるように切断面を選ぶ	回転軸を＝t とおく
式が与えられただけであるもの		

[手順]

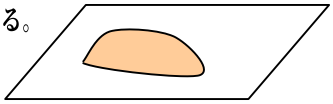
① 「はじめに図形が与えられるケース」
　は自分で座標設定して考える。

「x, y, z の関係が与えられ空間図形が定義されるケース。」
　図はイメージできなくとも 1変数を定数扱いすることで
　断面を捉えればよい。 図にこだわらない事である。

②切断面は

（ⅰ）非回転体のときは，$x=t$、$y=t$、$z=t$ のいずれかで,より切断面が単純になるものを採用する。（$\sqrt{}$ や 2 乗を含む文字を＝t とするのがねらい目）

領域の面積 $S(t)$ を求める。

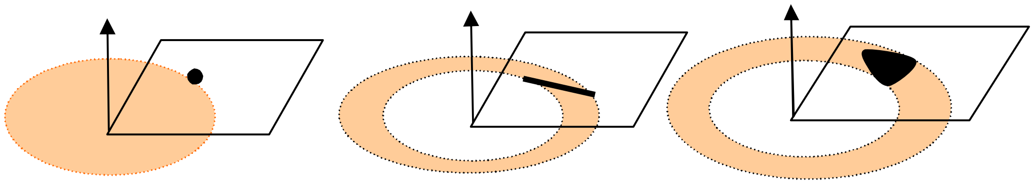


（ⅱ）回転体のときは，回転軸を＝t　とおき切断面を捉えると

棒を回す、板を回す、物体を回すに応じて（それは初めから不明のことが多い）

断面が　点、線分、領域となり　それを回転させた時にできる円を境界とする断面積 $S(t)$ をもとめる。　　[イメージ]　体の回りを　鉛筆を回す　下敷きを回す　消しゴムを回す

（ア）　棒を回す　　　（イ）板を回す　　　（ウ）物体を回す



（ア）この場合は囲まれる部分の容積を　　（イ）（ウ）こちらは回転部分の体積　が問われる。

③　**積分区間は**　　$S(t)\geq 0$ となる t の範囲　$t_1 \leq t \leq t_2$ を求める。

④　$V = \int_{t_1}^{t_2} S(t)\,dt$ **を計算する。**

$\boxed{\text{類題}}$ 空間の回転体･非回転体の領域内における格子点の数の問題は断面内における格子点の数を $N(t)$ として　$t_1, t_2 \in I$; $\sum_{t=t_1}^{t_2} N(t)$　で求められる。

滑ることなく転がる点の軌跡

角は弧度、等しい長さ部分を示し，$l = r\theta$　，$k(\cos\varphi, \sin\varphi)$，　$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$
から軌跡の方程式を導く
例　サイクロイド，トロコイド，アステロイド，カージオイド、インボリュート

3 ベクトルで点を追って考える軌跡の問題→媒介変数のグラフ→媒介変数での微分積分

● **時刻 t　における　位置･速度･加速度ベクトル、距離･速さ　と　道のり**
定義をしっかりと把握すること
時刻 t における質点の

位置ベクトル　$\overrightarrow{x(t)} = (f(t), g(t))$、　位置ベクトルの大きさ（＝距離という）
速度ベクトル　$\overrightarrow{v(t)} = (f'(t), g'(t))$、　速度ベクトルの大きさ（＝速さという）
加速度ベクトル　$\overrightarrow{\alpha(t)} = (f''(t), g''(t))$、　加速度ベクトルの大きさ

位置　距離　道のり　を区別せよ

● **曲線の長さの公式**を暗記しておく　コツは線素 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ の積分とイメージして

$$s = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$$ （←道のりは速さの定積分）

● **水の問題**は時間の関数である一般量の変化率、

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = S(t) \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow$$ 注入(流出)量＝水面の面積×水面の上昇(下降)速度

● **微分方程式を作り解く問題**　面積から　接線影・法線影
結局は変数分離形へ

①基本は $\boxed{\frac{dx}{dt} = k}$　$, x = kt + C(k > 0)$

②微分方程式の１番単純なモデルは人口増加、細胞分裂など変化の仕方が現在量に比例するもの
$\boxed{\frac{dx}{dt} = kx, (k > 0)}$ の解は $x = Ce^{kt}$

③ロジスチック方程式は変数分離形
3 $\boxed{\frac{dx}{dt} = k(1 - x)x, (k > 0)}$　の解は・・・

応用例　極形式 $r = f(\theta)$（$0 < \theta < t$）の曲線の長さが $\sqrt{2}\{f(t) - 1\}$ なる $f(\theta)$ を求めよ。

[重要][極方程式 $r = f(\theta)$ タイプ（難）は　媒介変数表示（易）にする]

極座標変換式 $\begin{cases} x = r\cos x \\ y = r\sin x \end{cases}$　から，$r = f(\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$

より　積分方程式 $\int_0^t \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}\, d\theta = \sqrt{2}\{f(t) - 1\}$ を解く

● 行列における係数比較

(誤) A：2次の正方行列 ， $p,q,p',q' \in R$ のとき

$pA+qE=p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

(正) A：2次の正方行列 $A \neq kE$ ， $p,q,p',q' \in R$ のとき

$pA+qE=p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

(誤) A：2次の正方行列 $p,q,p',q' \in R$ のとき

$A^2+pA+qE=A^2+p'A+q'E \Rightarrow p=p' \wedge q=q'$

7 行列方程式の解　諸悪の根源は行列の積の定義，ケーリーハミルトンで次数下げ

方法１　全て成分で

方法２　ケイリー・ハミルトンの定理で１次の行列方程式に帰着させる

方法３　（ア）解がｋＥの形のものと　（イ）それ以外のものとに分けて

例　X は２次の正方行列で、$X^2=X$ を満たすものをすべて求めよ

X は２次の正方行列で $X^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ を満たすものをすべて求めよ（神戸）

● 行列列の和

$E+A+A^2+A^3+\cdots+A^{n-1}=(E-A)^{-1}(E-A^n)$ の証明･変形は数列を真似て

$S=E+A+A^2+A^3+\cdots+A^{n-1}$

$AS=\qquad A+A^2+A^3+\cdots+A^{n-1}+A^n$　　等比数列との類似性･差異に注意

よって $(E-A)S=E-A^n$ 、$E-A$ の逆行列があるときはそれを左からかけて 得る

$E+2A+3A^2+4A^3+\cdots+nA^{n-1}=$ も同様に等差･等比型の手法 S-rS を真似る

● 行列列と行列漸化式の問題　交換法則が成り立たないことに注意

例 $X_{n+1}=AX_n+B$　など数列の漸化式の手法をまねる。京大（後期）東北

数列の漸化式　$a_{n+1}=pa_n+q$　平衡値

複素数漸化式　$z_{n+1}=\alpha z_n+\beta$　（旧課程）

ベクトル漸化式　$\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}+\vec{b}$　平衡ベクトル

行列漸化式　$X_{n+1}=AX_n+B$　平衡行列

● 三角数列の和

$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}=$

$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}=$

● 行列の n 乗問題のパターン

固有値･固有ベクトル　対角化　直和分解　漸化式　その他　$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 型

● 行列を見たらどんな1次変換であるかを見抜き、その観点で解く。

1 次変換とは、平面から平面への写像　で $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$　の形のもの

点を 1 次変換で繰り返して得られる点列 $\{P_n\}$ の問題

ア) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a^2 + b^2 = 1)$　型は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ：原点を中心とする角 θ の回転

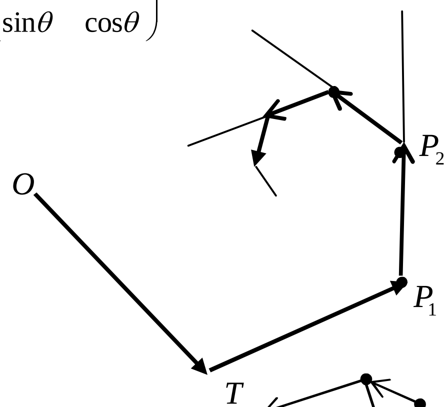
イ) スパイラル曲線と**スパイラル点列**の問題

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 型は<u>回転と拡大の合成</u>にと見抜くこと

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>回転と拡大の合成</u>

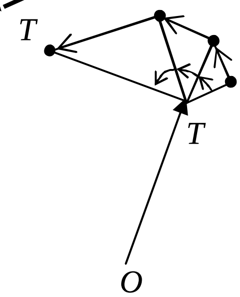
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} R(45^\circ)$$



8

$\boxed{例}$スパイラル点列の極限

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} \\ &= \overrightarrow{OT} + E\vec{x} + A\vec{x} + A^2\vec{x} + A^3\vec{x} + \cdots + A^{n-1}\vec{x} \\ &= \overrightarrow{OT} + (E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1})\vec{x} \\ &= \overrightarrow{OT} + (E - A)^{-1}(E - A^n)\vec{x} \quad , \ (E - A)^{-1} \text{が存在するとき} \\ &= \overrightarrow{OT} + (E - A)^{-1}((E - \{\tfrac{1}{2}R(45^\circ)\}^n))\vec{x} \to \overrightarrow{OT} + (E - A)^{-1}\vec{x} \end{aligned}$$



$\boxed{例}$ $\vec{x}_{n+1} - \vec{\alpha} = kR(\theta)(\vec{x}_n - \vec{\alpha})$　　$\vec{x}_n - \vec{\alpha} = k^{n-1}R((n-1)\theta)(\vec{x}_1 - \vec{\alpha})$

ウ) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a^2 + b^2 = 1)$　型は $y = mx$　$(m = \tan\theta)$ に関する線対称変換

i) $$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

ii) $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

x 軸対称移動と回転の合成　および　三角関数の有理関数化

エ) **非正則変換** $\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$　　E(平面全体) → 直線y＝kx

オ) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$型は一次変換というよりは連立漸化式で和差を作るタイプとして処理する

- **図形の像　，不動点・不動直線の問題**

- **点を 1 次変換で繰り返して得られる点列$\{P_n\}$の問題**

P_1　，P_2　，・・・・・・，P_n